MAT223 AYRIK MATEMATİK

Saymanın Temelleri
1. Bölüm

Emrah Akyar

Anadolu Üniversitesi
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, ESKİŞEHİR

2014–2015 Öğretim Yılı

Ayşe'nin Doğum Günü Partisi

Ayşe altı arkadaşını doğum günü partisine davet eder:

Bora, **C**enk, **D**erya, **E**bru, **F**ahri ve **G**azi

Soru

Hepsi birbirleriyle tokalaştığına göre toplam kaç tokalaşma olmuştur.

Bora Ben 6 kişi ile tokalaştım. Aslında her birimiz 6 kişi ile tokalaştı. Toplamda 7 kişi olduğumuza göre

$$7 \times 6 = 42$$

tokalaşma olmuştur.

Derya Bu sayı fazla gibi! Senin yaklaşımını kullanırsak 2 kişilik bir grupta toplam 2 tokalaşma olurdu ki bu doğru değil (2 kişi içerisinde 1 tokalaşma olur).
Her tokalaşma iki kez sayılıyor! Bu nedenle Bora'nın bulduğu sayı 2 ye bölünmeli. Yani,

$$\frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

tokalaşma yapıldı.

Davetlilerin masada nereye oturacağına dair bir anlaşmazlık çıkar (Herkes Ayşe'nin yanına oturmak istiyor). Bunun üzerine,

Ayşe
: Her yarım saatte bir yerlerimizi değiştirelim. Ta ki herkes her yere oturuncaya kadar.

Gazi
: bu senin doğum günü partin olduğuna göre sen hep baş köşede oturmalısın.

Soru

Bu durumda Ayşe'nin yeri sabit kalmak şartıyla kaç farklı oturuş düzeni mümkündür?

Ayşe'nin sağına (ilk sandalyeye) 6 davetliden herhangi birisi oturabilir. Şimdi ikinci sandalyeyi düşünelim:

1. Eğer Bora ilk sandalyede ise ikinci sandalyeye kalan 5 davetliden herhangi biri oturabilir.
2. Eğer Cenk ilk sandalyede ise ikinci sandalyeye kalan 5 davetliden herhangi biri oturabilir.

⋮

6. Eğer Gazi ilk sandalyede ise ikinci sandalyeye kalan 5 davetliden herhangi biri oturabilir.

O halde ilk iki sandalye için

$$\underbrace{5}_{\text{Bora}} + \underbrace{5}_{\text{Cenk}} +5+5+5+ \underbrace{5}_{\text{Gazi}} = 6 \times 5 = 30$$

farklı durum söz konusudur.

Şimdi ilk iki sandalyede kim oturursa otursun 3. sandalye için benzer şekilde 4 farklı durumun söz konusu olduğunu söyleyebiliriz. Buradan ilk üç sandalye için

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

farklı durum ortaya çıkar.
Bu şekilde devam edilecek olursa,

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

farklı biçimde oturulabilir.
Her yarım saatte bir yer değiştirseler bu 360 saat yani 15 gün eder.

Soru

Ayşe de herhangi bir yere oturabilseydi kaç farklı oturma düzeni söz konusu olurdu?

Ayşe'nin oturduğu sandalyeye partideki 7 kişiden herhangi birisi oturabileceği, onun yanındaki sandalyeye kalan 6 kişiden herhangi biri oturabileceği, ... için $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$.

Dans zamanı!

Soru

Çiftler bir kız ve bir erkekten oluşmak kaydıyla kaç farklı çift oluşturulabilir?

3 kız (Ayşe, Derya, Ebru) ve 4 erkek (Bora, Cenk, Fahri, Gazi) olduğuna göre

$$3 \times 4 = 12$$

farklı çift oluşturulabilir.

Fahri Herkes parasını ortaya koysun ve sayısal loto oynayalım. Uygun sayıda kupon doldurursak hangi sayılar çekilirse çekilsin büyük ikramiyeyi kazanabiliriz. (Baya uyanıkmış!)

Sayısal lotoda büyük ikramiyenin kazanılabilmesi için katılımcıların $1, 2, \ldots, 49$ *sayıları içerisinden belirlenecek olan 6 sayıyı bilmesi gerekir.*

Soru

Büyük ikramiyenin kazanılabilmesi için kaç farklı kolon oynamak gerekir?

Gazi Az önceki farklı oturuş problemine benziyor:
Ayşe bir sayı belirlesin ve kuponu Bora'ya versin. Bora da bir sayı belirleyip Cenk'e ve bu şekilde devam edelim. Böylece, Ayşe'nin 49 seçeneği var. Ayşe hangi sayıyı seçerse seçsin Bora kalan 48 sayıdan birini seçebilir. Böyle devam edersek,

$$49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$$

farklı kolon oynamamız gerekir.

Ayşe Gazi yanılıyorsun! Bu daha çok el sıkışma problemine benziyor.

Ayşe Eğer senin söylediğin yöntemi kullanırsak aynı kolonu birden fazla kez oynayabiliriz. Mesela,

Ayşe	Bora	...
7	23	...

seçmiş olsun. Bir sonraki seferde

Ayşe	Bora	...
23	7	...

olması mümkün.

Cenk Peki 7, 23, 31, 34, 40 ve 48 sayılarından oluşan kolon bu yöntemle kaç kez elde edilir?

Ayşe bu 6 sayıdan herhangi birisini işaretlediğinde Bora kalan 5 sayıdan herhangi birisini işaretleyebilir. Buna göre bu sayılardan oluşan kolon bu yöntemle

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

kez elde edilir.

O halde $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$ kolon içerisindeki her bir kolon $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ kez tekrar ettiğinden

$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816$$

farklı kolon söz konusudur.

Bu kadar kolonu oynamaya ne para yeter ne de zaman!

Sayısal lotodan vazgeçip Ayşe, Bora, Cenk ve Derya briç oynamaya karar verirler.

Cenk Bana yine aynı el geldi!

Derya Bu çok zor bir ihtimal!

Briç, bir deste (52 kart) kağıdın oyunculara 13 er 13 er dağıtılmasıyla oynanan bir oyun olduğuna göre,

Soru

Briçte kaç farklı el söz konusudur?

Ayşe Loto probleminin bir benzeri: Cenk'in kartları birer birer aldığını düşünelim. İlk kart destedeki 52 karttan herhangi birisi olabilir. İlk kart ne olursa olsun ikinci kart kalan 51 karttan biri olabilir. Böyle devam edilecek olursa 13 kart için

$$52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times 40$$

farklı durum söz konusudur.

Derya Ancak bu durumda her el yine birden fazla kez sayılmış olur. Gerçekten de Cenk elindeki kağıtları dizip kağıtları Ebru'ya gösterse Ebru kağıtların hangi sırada geldiğini bilemez. Tahmin etmeye çalışsa ilk kart için 13, ikinci kağıt için 12, bu şekilde devam edilse Cenk bu kağıtları

$$13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

farklı sırada almış olabilir. Bu durumda briçteki farklı el sayısı

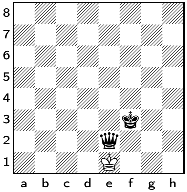
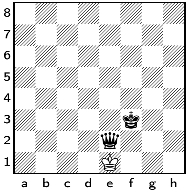
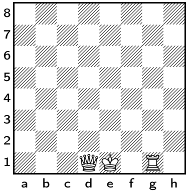
$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times 40}{13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} = 635\,013\,559\,600$$

olur.
Gördüğün gibi bu ihtimal gerçekten çok az.

Sonuçta 6 davetli satranç oynamaya karar verirler (Ayşe hakem olur).

Soru

Bu durumda birbirleriyle kaç farklı maç yapabilirler?

A	B	C
☐  ☐	☐  ☐	☐  ☐

Bora Bu problem daha önce tartıştığımız oturma düzeni ile ilgili probleme benziyor. "6 kişi 6 sandalyeye kaç farklı şekilde oturabilir?" Bu sorunun cevabının da 720 olduğunu söylemiştik.

Cenk Ancak aynı satranç tahtası başındaki iki kişinin yer değiştirmesi bir şeyi değiştirmez. Bora nın söylediği sayı doğru değil! Fazla!

Derya Hatta aynı iki kişi A masasında da oynasa, B masasında da oynasa bir şey değişmeyecektir.

Ebru O halde bu 3 masa $3 \times 2 \times 1$ değişik şekilde yerleştirilebileceğinden ve masalardaki kişiler iki değişik şekilde oturabileceğinden aynı çiftler $2 \times 2 \times 2 = 8$ farklı oturuş şekliyle masada aynı maçı yapacaklar.

Fahri Dolayısıyla aynı maç serisi için $6 \times 8 = 48$ farklı yerleşim düzeni mümkündür. Böylece

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{720}{48} = 15$$

farklı şekilde maç yapabilirler.

Kümeler

Tanım

Nesnelerin bir (iyi tanımlanmış) topluluğuna küme denir. Bir kümeyi oluşturan nesnelere ise bu kümenin elemanları denir.

Örnek

- Bir iskambil destesinde bulunan kartlar.
- Ayşe'nin doğum günü partisine katılanlar (Bu kümeyi P ile gösterelim).
- 6 sayıdan oluşan sayısal loto kolonları.
- $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi. $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi. $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi. $\mathbb{Z}_+$, negatif olmayan tam sayılar kümesi. $\mathbb{N}$, pozitif tam sayılar (doğal sayılar) kümesi. $\emptyset$, boş küme.

A bir küme ve b de bu kümenin bir elemanı ise bu durum $b \in A$, elemanı değil ise $b \notin A$ şeklinde gösterilir.

Bir A kümesinin eleman sayısı $|A|$ ile gösterilir (bazı kaynaklarda $n(A)$ gösterimi de kullanılmaktadır).

Buna göre $|P| = 7$, $|\mathbb{Z}| = \infty$ ve $|\emptyset| = 0$ olur.

Kümeler

$$P = \{\text{Ayşe}, \text{Bora}, \text{Cenk}, \text{Derya}, \text{Ebru}, \text{Fahri}, \text{Gazi}\}$$

şeklinde elemanları (küme) parantez(i) içerisinde listelenerek ya da

$$P = \{\text{Ayşe ve misafirleri}\}$$

şeklinde sözle de tanımlanabilir.

Kümeler çoğunlukla daha geniş bir kümenin bazı özelliklerini sağlayan elemanlarının topluluğu olarak tanımlanır.

Bu durum yine küme parantezi ve ":" simgesi (bazen de | simgesi) yardımıyla gösterilir.

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\} = \mathbb{Z}_+,$$
$$\{x \in P : x \text{ erkek}\} = \{\text{Bora}, \text{Cenk}, \text{Fahri}, \text{Gazi}\} = E$$

Bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanıysa A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir (A kümesi B kümesinin tüm elemanlarını bulundurabileceği gibi hiç birisini de bulundurmayabilir).

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise bu durumu $A \subseteq B$ şeklinde göstereceğiz.

Yukarıda tanımlanan kümelere göre,

$$E \subseteq P, \quad \emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

olur.

$A \subset B$ gösterimiyle A kümesinin B kümesinin alt kümesi olduğu ancak B kümesinin tüm elemanlarını bulundurmadığı ifade edilecektir.

Dolayısıyla yukarıdaki sayı kümeleri için kullanılan "$\subseteq$" simgesi "$\subset$" simgesiyle değiştirilebilir.

Verilen iki küme yardımıyla yeni kümeler tanımlayabiliriz:

- İki kümenin arakesiti (kesişimi) her iki kümeye de ait olan elemanların kümesidir. A ve B kümelerinin arakesiti $A \cap B$ şeklinde gösterilir. $D = \{x \in P : x \text{ 21 yaşından büyük}\} = \{\text{Ayşe}, \text{Bora}, \text{Cenk}\}$ olsun. $D \cap E = \{\text{Bora}, \text{Cenk}\}$ olur.

  Arakesiti boş küme olan kümelere ayrık kümeler denir.

- İki kümenin birleşimi ise elemanları en az bu iki kümenin birinde olan kümedir. A ve B kümelerinin birleşimi $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

$$D \cup E = \{\text{Ayşe}, \text{Bora}, \text{Cenk}, \text{Fahri}, \text{Gazi}\}$$

- A ve B kümelerinin farkı ise A kümesine ait olup B kümesine ait olmayan elemanların kümesidir.

$$D \backslash E = \{\text{Ayşe}\}$$

- A ve B kümelerinin simetrik farkı ise yalnızca A ya da yalnızca B kümesine ait olan elemanların kümesidir. A ve B kümelerinin simetrik farkı $A \triangle B$ ile gösterilir.

$$D \triangle E = \{\text{Ayşe}, \text{Fahri}, \text{Gazi}\}$$

Kümeler üzerindeki kesişim, birleşim ve fark işlemleri sayılar üzerindeki toplama, çarpma ve çıkarma işlemlerine benzer.

Sayılar üzerindeki bu işlemlere benzer olarak kümeler üzerindeki işlemler de bazı kurallara uymak zorundadır. Örneğin,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1}$$

olur.

(1) eşitliğinin doğruluğunu göstermek için eşitliğin sol tarafındaki keyfi bir elemanın eşitliğin sağ tarafındaki kümeye ait olduğunu ve eşitliğin sağ tarafındaki keyfi bir elemanın da eşitliğin sol tarafındaki kümeye ait olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \text{ ise} \quad & x \in A \text{ ve } x \in B \cup C \text{ olur.} \\ & x \in A \text{ ve } x \in B \text{ veya } x \in C \text{ olur.} \end{aligned}$$

- $x \in B$ ise $x \in A \cap B$ olur. O halde $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.
- $x \in C$ ise $x \in A \cap C$ olur. O halde $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.

Benzer şekilde,

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ ise } x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)$$

olur.

- $x \in (A \cap B)$ ise $x \in A$ ve $x \in B \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.
- $x \in (A \cap C)$ ise $x \in A$ ve $x \in C \Rightarrow x \in A$ ve $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

Bu yöntem yerine Venn şemaları da kullanılabilir.

Alt Kümelerin Sayısı

Soru

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı nedir?

Eleman sayısı az olan kümeleri inceleyerek başlayalım:

Küme	Alt kümeleri
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$, $\{a\}$
$\{a, b\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ $\{a, b, c\}$

Eleman Sayısı	0	1	2	3	...
Alt küme sayısı	1	2	4	8	...

Yukarıdaki tabloya bakarak n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi olduğu tahmin edilebilir.

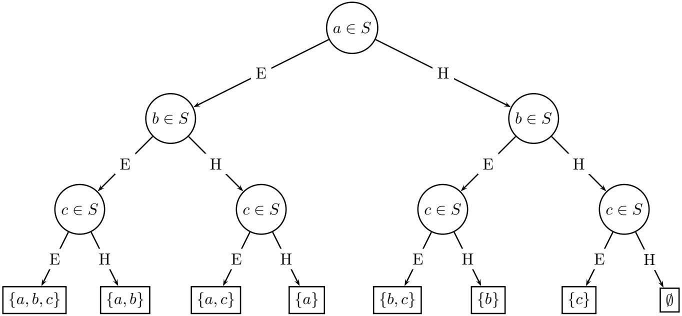
Bu tahminin doğru olduğunu göstermek hiç de zor değildir.
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ n elemanlı bir A kümesinin elemanları olsun. A kümesinin keyfi bir alt kümesi için:

- a_1 bu alt kümeye ait olabilir veya olmayabilir. İki olasılık var.
- a_1 bu alt kümeye ait olsa da olmasa da a_2 nin bu alt kümeye ait olması için yine iki olasılık söz konusudur.

  O halde sadece a_1 ve a_2 nin bu alt kümeye ait olup olmaması için $2 \cdot 2 = 4$ farklı durum söz konusudur.
- Benzer şekilde a_3 ün alt kümeye ait olup olmaması için iki durum söz konusudur. Bu durumda a_1, a_2 ve a_3 için $4 \cdot 2 = 8$ durum söz konusu olur.
- $\vdots$
- Bu şekilde devam edilecek olursa n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı 2^n bulunur.

Teorem

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir.



Şekil: $\{a, b, c\}$ kümesinin alt kümelerinin seçimi için karar ağacı

Alt kümeleri numaralandırmak

Soru

Verilen bir kümenin tüm alt kümelerini $0, 1, 2, \ldots$ *şeklinde nasıl numaralandırabiliriz?*

1. Yöntem $\emptyset$ ile başlayıp önce tek elemanlı alt kümeleri sonra iki elemanlı ve bu şekilde devam etmek. Örneğin, $A = \{a, b, c\}$ kümesinin alt kümeleri

$$\begin{array}{cccccc} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & \ldots \\ \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \ldots \end{array}$$

şeklinde numaralandırılabilir.

2. Yöntem Sözlük sıralaması. Küme parantezlerini ve virgül işaretlerini kaldırarak

$$\begin{array}{cccccccc} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. \\ \emptyset & a & ab & abc & ac & b & bc & c \end{array}$$

şeklinde numaralandırılabilir.

Ancak her iki yöntemde ilk başta sorulan soruya kolay bir cevap vermiyor. Örneğin, 10 elemanlı bir kümenin 233. alt kümesini yazabilmek için yukarıdaki listelerin oluşturulması gerekir.

3. Yöntem Bu yöntemi $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde açıklayalım: Eğer bir eleman bahsedilen alt kümeye ait ise bu elemanın pozisyonunu 1 alt kümeye ait değilse 0 ile gösterelim. Örneğin $\{a, c\}$ alt kümesi için 101 gösterimini kullanalım.

Böylece A kümesinin her alt kümesi üç karakter uzunluğundaki bir karakter dizisi (string) ile kodlanmış olur.

Tersi de doğrudur. Yani, her üç karakterlik 0 ve 1 den oluşan karakter dizisine A kümesinin bir alt kümesi karşılık gelir.

Onluk sistem	İkilik sistem	Üç karakterlik kod	Alt küme
0	0	000	$\emptyset$
1	1	001	$\{c\}$
2	10	010	$\{b\}$
3	11	011	$\{b, c\}$
4	100	100	$\{a\}$
5	101	101	$\{a, c\}$
6	110	110	$\{a, b\}$
7	111	111	$\{a, b, c\}$

Artık 10 elemanlı bir kümenin 233. alt kümesini hemen yazabiliriz. $233 = (11101001)_2$ olduğu hemen görülebilir. Küme 10 elemanlı olduğundan karşılık gelen kod 0011101001 olur. O halde 233. alt küme

$$\{a_3, a_4, a_5, a_7, a_{10}\}$$

olur.

Yukarıdaki durumu genelleştirebiliriz. n elemanlı bir kümenin alt kümelerini yukarıda yaptığımız gibi tam sayılarla eşleştirelim.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & = & (0)_2 & \Leftrightarrow & \emptyset \\ 1 & = & (1)_2 & \Leftrightarrow & \{a_n\} \\ \vdots & & & & \\ x & = & (\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ tane}})_2 & \Leftrightarrow & \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \end{array}$$

olsun. O halde

$$x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

bulunur.

Böylece toplam alt küme sayısının 2^n olduğunu bir başka şekilde daha kanıtlamış olduk.

Alt Kümelerin Yaklaşık Sayısı

Artık 100 elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısının 2^{100} olduğunu biliyoruz. Bu oldukça büyük bir sayı ama ne kadar büyük?

Soru

2^{100} *sayısının kaç basamağı vardır?*

Bilgisayar ya da hesap makinesi kullanmadan bu sorunun yanıtını verebilir miyiz?

$$\begin{aligned} 2^3 = 8 &< 10 \\ \left(2^3\right)^{33} &< 10^{33} \\ 2^{100} &< 2 \cdot 10^{33} \end{aligned}$$

O halde 2^{100} en fazla 34 basamaklıdır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} 2^{10} = 1024 &> 1000 = 10^3 \\ \left(2^{10}\right)^{10} &> \left(10^3\right)^{10} \\ 2^{100} &> 10^{30} \end{aligned}$$

yani 2^{100} en az 31 basamaklıdır.

Bu bize yaklaşık bir tahmin verebilir. Ancak, biraz hesapla tam basamak sayısını bulabiliriz.

Eğer bir sayı k basamaklı ise bu sayı 10^{k-1} sayısı ile 10^k sayısı arasındadır (10^{k-1} e eşit olabilir ama 10^k dan kesin küçük olur).
2^{100} sayısının k basamaklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$10^{k-1} \leq 2^{100} < 10^k$$

eşitsizliğini sağlayan k sayısını bulmalıyız. 10 tabanında logaritma alırsak,

$$\begin{aligned} (k-1)\log 10 &\leq 100\log 2 < k\log 10 \\ k-1 &\leq 100\log 2 < k \end{aligned}$$

olur.
Böylece $k-1$ tam sayısı $100\log 2$ sayısının tam değeri olur. Buradan,

$$k-1 = [\![100\log 2]\!] = [\![30.10299]\!] = 30$$

ve $k = 31$ bulunur ($\log 2 \approx 0.3010299957$).
O halde sayı 31 basamaklıdır.

Alıştırma (1.4.1)

2^{100} sayısı ikilik sistemde yazıldığında kaç bit (digit) bulundurur?

$$\underbrace{\frac{2^{100}}{2} = 2^{99},\ \frac{2^{99}}{2} = 2^{98},\ \ldots,\frac{2}{2} = 1}_{100\ \text{kez}}$$

olduğundan $2^{100} = (\underbrace{1000\ldots0}_{101\ \text{digit}})_2$ bulunur.

Alıştırma (1.4.2)

2^n nin basamak sayısı için bir formül bulunuz.

2^n sayısı k basamaklı olsun. Bu durumda daha önce anlattığımız gibi

$$\begin{array}{rcccl} 10^{k-1} & \leq & 2^n & < & 10^k \\ (k-1)\log 10 & \leq & n\log 2 & < & k\log 10 \\ k-1 & \leq & n\log 2 & < & k \end{array}$$

olur. Buradan $k-1 = [\![n\log 2]\!]$ ya da

$$k = [\![n\log 2]\!] + 1$$

bulunur.

Diziler

Yukarıda bir kümenin alt kümelerini, 0 ve 1 lerden oluşan string ifadeler ile kodlamıştık. Benzer olarak n karakter uzunluğundaki bir string ifadeyi başka sembollerle de oluşturabiliriz.

Örneğin, 0 ve 1 yerine a, b, c kullanılacak olursa, n karakter uzunluğunda ve birbirinden farklı 3^n string ifade elde edilmiş olur.

Aşağıdaki teorem bunun bir genellemesidir.

Teorem

k farklı eleman ile oluşturulan n karakter uzunluğunda birbirinden farklı string ifade sayısı k^n olur.

Örnek

isim	E/K	gg/aa/yy	il kodu
□□□□□□□□	□	□□/□□/□□	□□

İsim : 29^8 (Ğ harfi ile başlayan isimleri göz ardı ediyoruz)
Cinsiyet : 2
Doğum Tarihi : 12
31 (31.02 gibi tarihleri göz ardı ediyoruz)
100
İl kodu : 81

O halde elde edilebilecek farklı string sayısı

$$29^8 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 100 \cdot 81 = 3014684983068170400$$

olur.

Teorem

İlk karakteri k_1 farklı sembol, ikinci karakteri k_2 farklı sembol, ve benzer şekilde n. karakteri ise k_n farklı sembol kullanılarak oluşturulan n karakter uzunluğundaki bir string ifade için

$$k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$$

farklı durum söz konusudur.

Örnek

n basamaklı ve negatif olmayan kaç farklı tam sayı yazılabilir?
Sayının n basamaklı olması için en soldaki basamağının 0 dan farklı olması gerekir. Yani, soldaki basamak $1, 2, \ldots, 9$ rakamlarından birisi olabilir. Diğer basamaklar ise 10 rakamdan herhangi biri olabilir.O halde cevap $\boxed{9 \cdot 10^{n-1}}$ olur.

Permütasyonlar

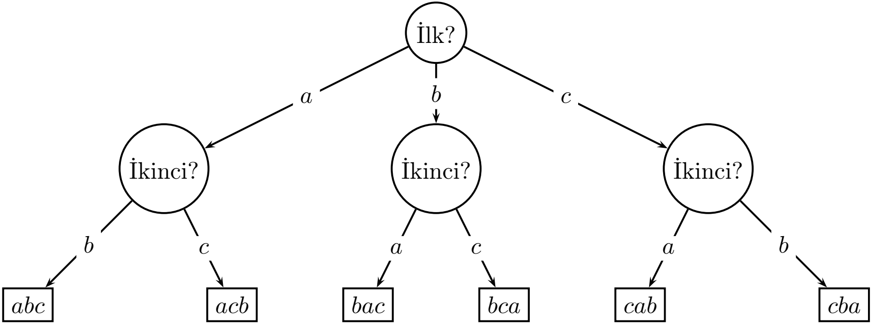
Ayşe'nin doğum günü partisinde davetlilerin sandalyelere kaç farklı şekilde oturabileceğini incelemiştik.
Sandalyeleri $1, 2, \ldots, n$ şeklinde numaralandırdığımızı düşünelim. Bu durumda n kişiyi bu sandalyelere

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

farklı şekilde yerleştirebiliriz (dizebiliriz).
($n!$, n objenin farklı dizilimlerinin (permütasyonlarının) sayısı)

Teorem

n objenin farklı dizilimlerinin (permütasyonlarının) sayısı $n!$ olur.



Şekil: $\{a, b, c\}$ kümesinin permütasyonları için karar ağacı

Açıktır ki, n elemanlı bir küme için en üstteki düğümden çıkan ok sayısı da n olacaktır. Dolayısıyla bir sonraki seviyede n düğüm yer alacak ve bu düğümlerin her birinden $n-1$ tane ok çıkacaktır. Bu şekilde devam edilecek olursa en alt seviyede $n!$ düğüm yer alır.

Sıralı Alt Kümelerin Sayısı

Soru

100 atletin katıldığı bir yarışta ilk 10 atletin derecesi dikkate alınacaktır. Buna göre yarışta ilk 10 atlet için kaç farklı sıralama söz konusu olur?

1.	2.	3.	...	10.
100	99	98	...	91

O halde cevap

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 91$$

olur.

Soruyu genellersek: n atletten ilk k tanesi kaç farklı şekilde sıralanır?

Teorem

n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümeleri

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

farklı şekilde sıralanır.

Diğer taraftan

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

olur.

Teorem

n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olur.

Kanıt.

Az önce n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ farklı şekilde sıralandığını söyledik.
Burada sıralamanın önemi olmadığından, her bir alt küme birden fazla kez sayılmış olur (Ayşe'nin partisinden biliyoruz ki, aslında her bir k elemanlı alt kümeyi $k!$ kez saydık). Bu durumda hiçbir sıralama yapmaksızın k elemanlı alt kümelerin sayısı

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{olur.}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n \text{ nin } k \text{ lı kombinasyonu})$$

Sayısal lotoda farklı kolonların sayısı: $\binom{49}{6}$

Partideki el sıkışma sayısı: $\binom{7}{2}$

$\binom{n}{k}$ sayılarına binom katsayıları da denir (daha sonra detaylı olarak inceleyeceğiz).

$\binom{n}{n} = 1$ n elemanlı bir kümenin bir tane n elemanlı alt kümesi vardır.

$\binom{n}{0} = 1$ n elemanlı bir kümenin bir tane 0 elemanlı alt kümesi vardır ($\emptyset$).

$\binom{0}{0} = 1$ Yukarıdaki ifade $\emptyset$ için de doğrudur.

Teorem

Binom katsayıları aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{3}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \tag{4}$$

Kanıt.

Önce (2) özdeşliğini kanıtlayalım.

S kümesi n elemanlı bir küme olsun.

(2) eşitliğinin sol tarafı S kümesinin k elemanlı alt kümelerinin sayısını, sağ tarafı ise $n-k$ elemanlı alt kümelerinin sayısını gösterir.

Bu iki sayının eşit olduğunu görmek için her bir k elemanlı alt kümenin $n-k$ elemanlı alt kümeye karşılık geldiğini görmeliyiz.

$n-k$ elemanlı alt kümeleri k elemanlı kümelerin S içindeki tümleyenleri olduğundan bu kümelerden eşit miktarda olması gerekir. □

Şimdi de (3) özdeşliğini kanıtlayalım:

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}$$

eşitliğinden yararlanırsak (bu eşitliğin her iki tarafını $(n-1)!$ ile çarpıp, $(k-1)!(n-k-1)!$ ile bölersek),

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

Son olarak (4) özdeşliğini kanıtlayalım:

$$\underbrace{\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{0 elemanlı alt kümelerin sayısı}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{1 elemanlı alt kümelerin sayısı}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{2 elemanlı alt kümelerin sayısı}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{n-1 elemanlı alt kümelerin sayısı}} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{n elemanlı alt kümelerin sayısı}}}_{2^n}$$

Alıştırma

"KALABAK" sözcüğündeki tüm harfler kullanılarak,

1. Anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime elde edilebilir?

Çözüm

Eğer tüm harfler birbirinden farklı olsaydı. 7 karakterin farklı dizilimlerinin sayısının 7! olduğunu hemen söyleyebilirdik.

Verilen sözcükte 3 tane "A", 2 tane de "K" harfi bulunduğundan ve bu harflerin kendi içerisinde yer değiştirmesinin elde edilen kelimeyi değiştirmeyeceği düşünülecek olursa, cevap

$$\frac{7!}{3!\,2!} = 420$$

olarak elde edilir.

Alıştırma

"KALABAK" sözcüğündeki tüm harfler kullanılarak,

2. Elde edilen bu kelimelerden kaç tanesinde iki "A" harfi yan yana olur (üç "A" harfi yan yana olduğunda da iki "A" harfi yan yana gelmiş olur)?

Çözüm

İki "A" harfini birleştirip bunu $\hat{A}$ ile gösterelim. Bu durumda elimizdeki harfler $K\hat{A}LBAK$ olur. Yukarıdan bu harflerle elde edilebilecek anlamlı ya da anlamsız kelimelerin sayısının $\frac{6!}{2!}$ ("$\hat{A}$" ile "A" farklı harfler gibi düşünülecek olursa) olduğunu söyleyebiliriz. Fakat "$\hat{A}$" ile "A" harfi yan yana geldiğinde (yani üç "A" yan yana geldiğinde) bu harflerin kendi içinde yer değiştirmesi elde edilen kelimeyi değiştirmez. Bu nedenle yukarıdaki sayıdan üç tane "A" harfinin yan yana geldiği durumların sayısını çıkartmalıyız. Böylece cevap

$$\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 300$$

Alıştırma

"KALABAK" sözcüğündeki tüm harfler kullanılarak,

3. Elde edilen bu kelimelerden kaç tanesinde iki "A" harfi yan yana gelmez?

Çözüm

Elbette yukarıdan cevabın $420 - 300 = 120$ olduğu açıktır. Soruyu yukarıdan bağımsız olarak düşünüp çözelim.
KALABAK sözcüğündeki "A" harflerini çıkarırsak, içerisinde iki tane "K" harfli olan 4 harfli bir sözcük kalır. Bu sözcükten $\frac{4!}{2!}$ farklı sözcük elde edilebilir. Şimdi $.K.L.B.K.$ ifadesinde "." ile işaretlenen yerlerden üç tanesini seçip buralara "A" harflerini koyarsak, "A" harfleri yan yana gelmemiş olur. Bu seçimi de $\binom{5}{3}$ farklı şekilde yapabileceğimizden cevap

$$\frac{4!}{2!}\binom{5}{3} = 120$$

olur.

Alıştırma

"BASKETBOL" sözcüğündeki harfler birer kez kullanılarak oluşturulabilecek 9 harfli anlamlı ya da anlamsız tüm kelimeler içinden kaç tanesinde *tam olarak iki tane* ünlü (sesli) harf yan yanadır?

Not: "A", "E" ve "O" ünlü (sesli) harflerdir. Diğer taraftan, BSKTAEBOL istenen türde bir kelimeyken, BESKATBOL, BAEOSKTBL, vb. istenen türden değildir.

Çözüm (I. Yol:)

Sesli harfleri çıkarıp, "A" ve "E" harflerini tek bir harf gibi düşünecek olursak, B, $\boxed{\text{AE}}$,S,K,T,B,L ile hiç bir koşul olmaksızın anlamlı ya da anlamsız üretilebilecek kelimelerin sayısı $\frac{7!}{2!}$ olur (iki tane "B" harfi olduğundan). Tam olarak iki sesli harfin yan yana olması istendiğinden kalan "O" sesli harfi için ise aşağıda $\bullet$ ile işaret edilen 6 yerden biri uygundur.

$$\bullet B \boxed{\text{AE}} S \bullet K \bullet T \bullet B \bullet L \bullet$$

Ayrıca, 3 sesli harf biri ikili diğeri tek olacak şekilde iki gruba $2 \cdot \binom{3}{2}$ farklı şekilde ayrılabilir (ikilinin kendi içinde yer değiştirmesini de sayıyoruz). Böylece cevap,

$$\frac{7!}{2!} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \binom{3}{2} = 6^2 \frac{7!}{2!} \qquad [= 90\,720]$$

olur.

Çözüm (II. Yol:)

Hiç bir koşul olmasaydı verilen kelimedeki harflerle üretilebilecek anlamlı ya da anlamsız kelime sayısı $\frac{9!}{2!}$ olurdu. Bu sayıdan herhangi iki sesli harfin yan yana gelmediği ve üç sesli harfin yan yana geldiği durumları çıkartırsak, tam olarak iki tane sesli harfin yan yana geldiği durumların sayısını buluruz.

Herhangi iki sesli harfin yan yana gelmediği durumların sayısını bulmak için sesli harfleri çıkaralım. Kalan B,S,K,T,B,L sessiz harfleri ile oluşturulabilecek tüm farklı kelimelerin sayısı $\frac{6!}{2!}$ olur. Sesli harfleri ise aşağıda • ile gösterilen 7 pozisyondan 3'üne yerleştirelim.

$$\bullet B \bullet S \bullet K \bullet T \bullet B \bullet L \bullet$$

Bu durumda iki ve üç sesli harf yan yana gelmemiş olur. Sesli harflerin kendi arasında yer değiştirebileceği de hesaba katılırsa bu şekildeki kelimelerin sayısı $\binom{7}{3} \cdot \frac{6!}{2!} \cdot 3!$ olur.

Çözüm (II. Yol:)

Şimdi üç sesli harfin yan yana geldiği durumların sayısını bulalım.

3 sesli harfi tek harf gibi düşünecek olursak, $\boxed{\text{AEO}}$,B,S,K,T,B,L harfleri ile oluşturulabilecek kelime sayısı $\frac{7!}{2!} \cdot 3!$ olur (sesli harfler kendi içinde de yer değiştirebilir).

Böylece cevap

$$\frac{9!}{2!} - \binom{7}{3} \cdot \frac{6!}{2!} \cdot 3! - \frac{7!}{2!} \cdot 3! = 181440 - 75600 - 15120 = 90\,720$$

elde edilir.

Alıştırma

Altışar kişilik ve özdeş olmayan iki yuvarlak masaya 12 kişi kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm

Birinci masada oturacak 6 kişi $\binom{12}{6}$ farklı şekilde seçilir. Geriye kalan 6 kişi ise ikinci masada oturur.

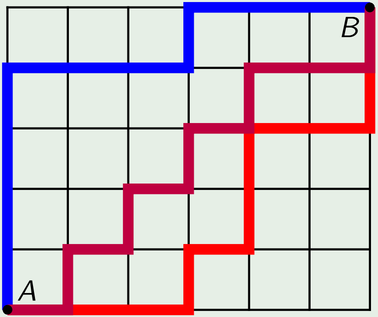
Masalardaki kişiler de $(6-1)!$ farklı şekilde masalarda oturabileceğinden cevap

$$\binom{12}{6}(5!)^2 \qquad [= 13305600]$$

olur.

Alıştırma

Her seferinde bir birim sağa ya da yukarı gitmek koşuluyla A noktasından B noktasına kaç farklı şekilde gidilebilir?



Çözüm

Her seferinde ya bir birim **S**ağa ya da bir birim **Y**ukarı gidilebileceğinden ve B noktasına ulaşabilmek için 6 kez sağa, 5 kez de yukarı gidilmesi gerektiğinden

$$\underbrace{\underbrace{SSSSSS}_{6 \text{ tane}}\ \underbrace{YYYYY}_{5 \text{ tane}}}_{11 \text{ tane}}$$

karakterlerinin her bir dizilimi bize A noktasından B noktasına bir yol verecektir. Bu karakterler de

$$\frac{11!}{6!\,5!} = 462$$

farklı şekilde sıralanır.