100/100 Çözümü

01 / 12 / 2016

MAT 201 - Analiz III / III. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

Soru: Aşağıda verilenden *sadece birini seçiniz ve seçtiğiniz fonksiyonun* verilen noktada sürekli olduğunu gösteriniz. (100p.)

a) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ *ve* $(1,-1)$ b) $f(x,y,z) = \frac{y-x}{y+z}$ *ve* $(1,0,1)$

Çözüm: (b); Yani, her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki $\ni$

$|x-1| < \delta$, $|y-0| = |y| < \delta$ ve $|z-1| < \delta$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z) \in D_f$ için

$|f(x,y,z) - f(1,0,1)| < \varepsilon$ olsun.

Verilen fonksiyondan kolayca $f(1,0,1) = \frac{0-1}{0+1} = -1$ olduğu açıktır. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısının verilsin. O zaman,

$$|f(x,y,z) - f(1,0,1)| = \left|\frac{y-x}{y+z} - (-1)\right| = \left|\frac{y-x}{y+z} + 1\right|$$

$$= \left|\frac{y-x+y+z}{y+z}\right|$$

$-1+1$

$$= \left|\frac{2y-x+z}{y+z}\right|$$

$$= \left|\frac{2y-x+z-1+1}{y+z}\right|$$

$$= \frac{|2y-(x-1)+z-1|}{|y+z|}$$

$$\leq \frac{|2y|+|x-1|+|z-1|}{|y+z|} = \frac{2|y|+|x-1|+|z-1|}{|y+z|}$$

$$< \frac{2\delta+\delta+\delta}{|y+z|} = \frac{4\delta}{|y+z|} \quad \ldots\ldots (*)$$

elde ederiz. Burada, doğal olarak, $\frac{1}{|y+z|}$ için bir üst sınır bulmak durumundayız. Şimdi bu sayıyı belirlemeye çalışalım.

$$|y|<\delta \implies -\delta<y<\delta \quad \ldots\ldots (a)$$

ve

$$|z-1|<\delta \implies -\delta<z-1<\delta$$

$$\iff 1-\delta<z<1+\delta \quad \ldots\ldots (b)$$

olup, (a) ve (b)'den kolayca;

$$\begin{array}{rl} & -\delta<y<\delta \\ + & 1-\delta<z<1+\delta \\ \hline & 1-2\delta<y+z<1+2\delta \end{array}$$

$$\iff 1-2\delta<|y+z|<1+2\delta \quad (0<\delta<1/2)$$

$$\iff \frac{1}{1+2\delta}<\boxed{\frac{1}{|y+z|}<\frac{1}{1-2\delta}} \quad (0<\delta<1/2)$$

elde ederiz. Bu üst sınır, $(*)$'da göz önüne alınırsa:

$$\left|f(x,y,z)-f(1,0,1)\right| = \left|\frac{y-x}{y+z}+1\right|$$

$$= \ldots$$

$$\leq \frac{4\delta}{|y+z|} < \frac{4\delta}{1-2\delta} < \varepsilon \text{ olur, eğer}$$

$$\delta=\delta(\varepsilon)=\min\left\{\varepsilon,\ \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}\right\}=\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}$$ seçilirse.

$\therefore$ Verilen her keyfi $\varepsilon>0$ sayısı ve

$$|x-1|<\delta:=\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)},\quad |y|<\delta:=\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} \text{ ve } |z-1|<\delta:=\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}$$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z)\in D_f$ için

$$\left|\frac{y-x}{y+z}-(-1)\right|<\varepsilon$$ daima doğru olur.

Dolayısıyla, $\varepsilon>0$'ın keyfiliği bizi

$$\frac{y-x}{y+z}-(-1)\to 0 \equiv \frac{y-x}{y+z}\to -1$$

$$\equiv \lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)}\frac{y-x}{y+z}=-1$$

ilişkisine götürür. ☺