100/100

ÇÖZÜM (KISMEN)

08 / 12 / 2016

MAT 201 - Analiz III / III. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

Soru: Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve seçtiğiniz fonksiyonun verilen noktadaki sürekliliğini ilgili noktadan geçen ve oluşturacağınız bir parametrik eğri boyunca belirleyiniz. Bu belirlemeye göre, gerçekten verilen fonksiyon verilen noktada sürekli midir? Araştırınız. (100p.)

a) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ *ve* $(0,1)$ ~~b)~~ $f(x,y,z)=\frac{z}{x+y}$ *ve* $(0,1,0)$

Çözüm: [(a) Ödev]

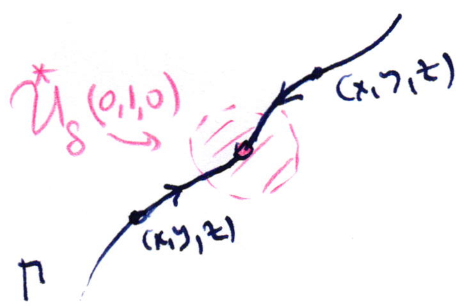
Çözüm b) :

$$\Gamma : \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \ni \exists\, t_0\in\mathbb{R} \ni \begin{bmatrix} x_0=x(t_0)=0 \\ y_0=y(t_0)=1 \\ z_0=z(t_0)=0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\lim_{\Gamma\ni(x,y,z)\to(0,1,0)} f(x,y,z) = f(0,1,0)$$

olduğunu görmek durumundayız. Önce, Γ parametrik eğrisini oluşturalım.



$$\Gamma : \begin{Bmatrix} x=x(t)=t \\ y=y(t)=t+1 \\ z=z(t)=t \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlarsak, $t_0=0$ için $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,0)$ olduğu açıkça görülür.

$$t \to 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \to (0,1,0)$$

olduğuna göre, $f(x,y,z) = \frac{z}{x+y}$ fonksiyonunu göz önüne alınırsa;

$$\lim_{\neg\ni(x,y,z)\to(0,1,0)} f(x,y,z) = \lim_{t\to 0} f(x(t), y(t), z(t))$$

$$= \lim_{t\to 0} f(t, 1+t, t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+2t} = 0$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi, gerçekten $\lim_{(x,y,z)} \frac{z}{x+y} = 0$ olduğunu göstermek durumundayız. (Neden?)

Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\ni \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyleki

$$|x-0| = |x| < \delta, \ |y-1| < \delta \text{ ve } |z-0| = |z| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z) \in D_f$ için

$$\left| f(x,y,z) - f(0,1,0) \right| = \left| \frac{z}{x+y} - 0 \right| < \varepsilon$$

olsun. Bakalım:

$$|x|<\delta \iff -\delta < x < \delta$$

$$|y-1|<\delta \iff -\delta < y-1 < \delta$$
$$\iff 1-\delta < y < 1+\delta$$

ve

$$|z|<\delta \iff -\delta < z < \delta$$

olup, birinci ve ikinci eşitsizliklerden de, yani

$$\begin{array}{rl} & -\delta < \cancel{x} < \delta \\ + & 1-\delta < y < 1+\delta \\ \hline & 1-2\delta < x+y < 1+2\delta \end{array}$$

$$\iff 1-2\delta < |x+y| < 1+2\delta \quad (0<\delta<1/2)$$

$$\iff \frac{1}{1+2\delta} < \boxed{\frac{1}{|x+y|} < \frac{1}{1-2\delta}} \quad (0<\delta<1/2)$$

elde ederiz. Bu üst sınırı gözönüne alarak;

$$\left|\frac{z}{x+y}\right| = \frac{|z|}{|x+y|} < \frac{\delta}{|x+y|} < \frac{\delta}{1-2\delta} < \varepsilon \text{ olur,}$$

eğer

$$\delta := \delta(\varepsilon) := \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right\} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \text{ seçilir-}$$

se.

$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$ ve $|x|<\delta := \dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$, $|y-1|<\delta := \dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ ve

$|z|<\delta := \dfrac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ koşulunu sağlayan her $(x,y,z)\in D_f$

için $$|f(x,y,z) - f(0,1,0)| = \left|\frac{z}{x+y} - 0\right| < \varepsilon$$