

ÇÖZÜM (KISIMEN)

08 / 12 / 2016

MAT 201 - Analiz III / III. KSS

(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza : 

Soru: Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve seçtiğiniz fonksiyonun verilen noktadaki sürekliliğini ilgili noktadan geçen ve oluşturacağımız bir parametrik eğri boyunca belirleyiniz. Bu belirlemeye göre, gerçekten verilen fonksiyon verilen noktada sürekli midir? Araştırmız. (100p.)

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ve $(0, 1)$

b) $f(x, y, z) = \frac{z}{x+y}$ ve $(0, 1, 0)$

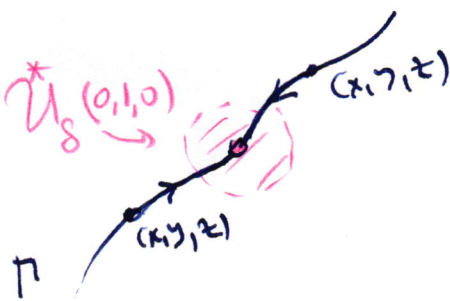
Çözüm: [(a) ödev]

Çözüm b): $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x(t_0) = 0 \\ y_0 = y(t_0) = 1 \\ z_0 = z(t_0) = 0 \end{cases}$

olmak üzere,

limin $f(x, y, z) = f(0, 1, 0)$
 $\exists (x, y, z) \rightarrow (0, 1, 0)$

olduğunu görmek durumundayız. Önce, Γ parametrik eğrisini oluşturalım.



$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t+1 \\ z = z(t) = t \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, $t_0 = 0$ için
 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ olduğu açıkça görülmüştür.

$$t \rightarrow 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \rightarrow (0, 1, 0)$$

olduğuna göre, $f(x, y, z) = \frac{z}{x+y}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.
sa;

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 1, 0)} f(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t), z(t))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 1+t, t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1+2t} = 0$$

olduğu kolayca görülmektedir. Şimdi, pernel-
ten

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 1, 0)} \frac{z}{x+y} = 0 \text{ olduğunu göstermek durumundayız. (Neden?)}$$

Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyle ki

$$|x-0| = |x| < \delta, |y-1| < \delta \text{ ve } |z-0| = |z| < \delta$$

kosulunu sağlayan her $(x, y, z) \in D_f$ için

$$\left| f(x, y, z) - f(0, 1, 0) \right| = \left| \frac{z}{x+y} - 0 \right| < \varepsilon$$

olsun. Bakalım:

$$|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$$

$$|y-1| < \delta \Leftrightarrow -\delta < y-1 < \delta \\ \Leftrightarrow 1-\delta < y < 1+\delta$$

ve

$$|z| < \delta \Leftrightarrow -\delta < z < \delta$$

olup, birinci ve ikinci eşitsizliklerden de, yani

$$\begin{array}{r} -\delta < x < \delta \\ + \quad 1-\delta < y < 1+\delta \\ \hline \end{array}$$

$$1-2\delta < x+y < 1+2\delta$$

$$\Leftrightarrow 1-2\delta < |x+y| < 1+2\delta \quad (0 < \delta < 1/2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2\delta} < \frac{1}{|x+y|} < \frac{1}{1-2\delta} \quad (0 < \delta < 1/2)$$

elde ederiz. Bu üst sınır, gözönüne alınarak;

$$\left| \frac{z}{x+y} \right| = \frac{|z|}{|x+y|} < \frac{\delta}{|x+y|} < \frac{\delta}{1-2\delta} < \varepsilon \text{ olur,}$$

eğer

$$\delta := \delta(\varepsilon) := \min \left\{ \varepsilon, \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \right\} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \text{ seçilirse}$$

se.

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \text{ ve } |x| < \delta := \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, |y-1| < \delta := \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \text{ ve}$$

$$|z| < \delta := \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \text{ koşulunu sağlayan her } (x, y, z) \in D_f$$

için

$$\left| f(x, y, z) - f(0, 1, 0) \right| = \left| \frac{z}{x+y} - 0 \right| < \varepsilon$$

13