100
100

CEVAP KAĞIDI
(KISMEN)

13 / 11 / 2016

MAT 201 - Analiz III / Vize Soruları

(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

AŞAĞIDA 4 (DÖRT) SORU VERİLMİŞ OLUP SORULARDAKİ TALİMATLARA UYARAK İSTENENLERİ YAPINIZ

Soru 1) Aşağıda farklı farklı uzaylarda çeşitli kümeler verilmiştir. Önce istediğiniz ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız. (25p.)

(a) $\mathcal{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 4 \ ve \ z \geq 1 \right\}$ kümesini ilgili uzayda önce çiziniz ve ardından da kompakt (tıkız) ve bölge olup olmadığını araştırınız.

(b) $\mathcal{H} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 < 9 \right\}$ kümesini ilgili uzayda önce çiziniz ve ardından da bu kümenin iç, sınır ve yığılma noktalarının oluşturduğu kümeleri belirleyiniz.

(c) $\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ 4 < (x-1)^2 \leq 9 \right\}$ kümesini ilgili uzayda önce çiziniz ve ardından da bağlantılı ve yol bağlatılı olup olmadığını araştırınız.

(ç) $\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < [\![x - y]\!] \leq 1 \right\}$ kümesini ilgili uzayda önce çiziniz ve ardından da açık ve kapalı küme olup olmadığını araştırınız.

Soru 2) Aşağıda verilenlerden önce *birini seçiniz* ardından da fonksiyonların verilen noktalardaki limitlerini belirleyiniz ve doğruluklarını da $\epsilon - \delta$ ilişkisiyle ispatlayınız. (25p.)

(a) $f(x, y) = \frac{2x-y}{2y-x}$ ve $(1, -1)$ (b) $f(x, y, z) = \frac{2x-y+z}{z-2y-x}$ ve $(-1, 1, 0)$

Soru 3) Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece ***birini seçiniz*** ve seçtiğiniz fonksiyonun en geniş tanım kümesini önce belirleyiniz ve ardından da ilgili kümeyi ilgili uzayda çiziniz. (25p.)

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ (b) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

(c) $f(x, y) = log\left(\frac{x}{x-y}\right)$ (ç) $f(x, y, z) = \sqrt{z} - \frac{z}{4-x^2-4y^2}$

Soru 4) Aşağıda $\mathbb{R}^n$ uzayında farklı farklı önermeler verilmiştir. Sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni araştırınız. (25p.)

(a) $\mathbb{A}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ ' de bağlantılı bir küme ise yol bağlantılı olur mu? Neden? Farklı iki örnek veriniz.

(b) $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ ' de iki kapalı küme ise $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ kümesi de $\mathbb{R}^n$'de kapalı küme olur mu? Neden?

(c) $\mathbb{A}$ ve $\mathbb{B}$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ ' de iki açık küme ise $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ kümesi de $\mathbb{R}^n$'de açık küme olur mu? Neden?

(ç) $\mathbb{A}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ ' de açık bir kümedir *ancak ve ancak* $\mathbb{A} = \mathring{\mathbb{A}}$'dir. İspatlayınız.

Başarılar...

Ders ve Sınav Sorumlusu : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK, ÇKÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Bazılarının çözülmesi herzamanki gibi bana kaldı. Diğerlerinin çözümünde yine sizlere ödev

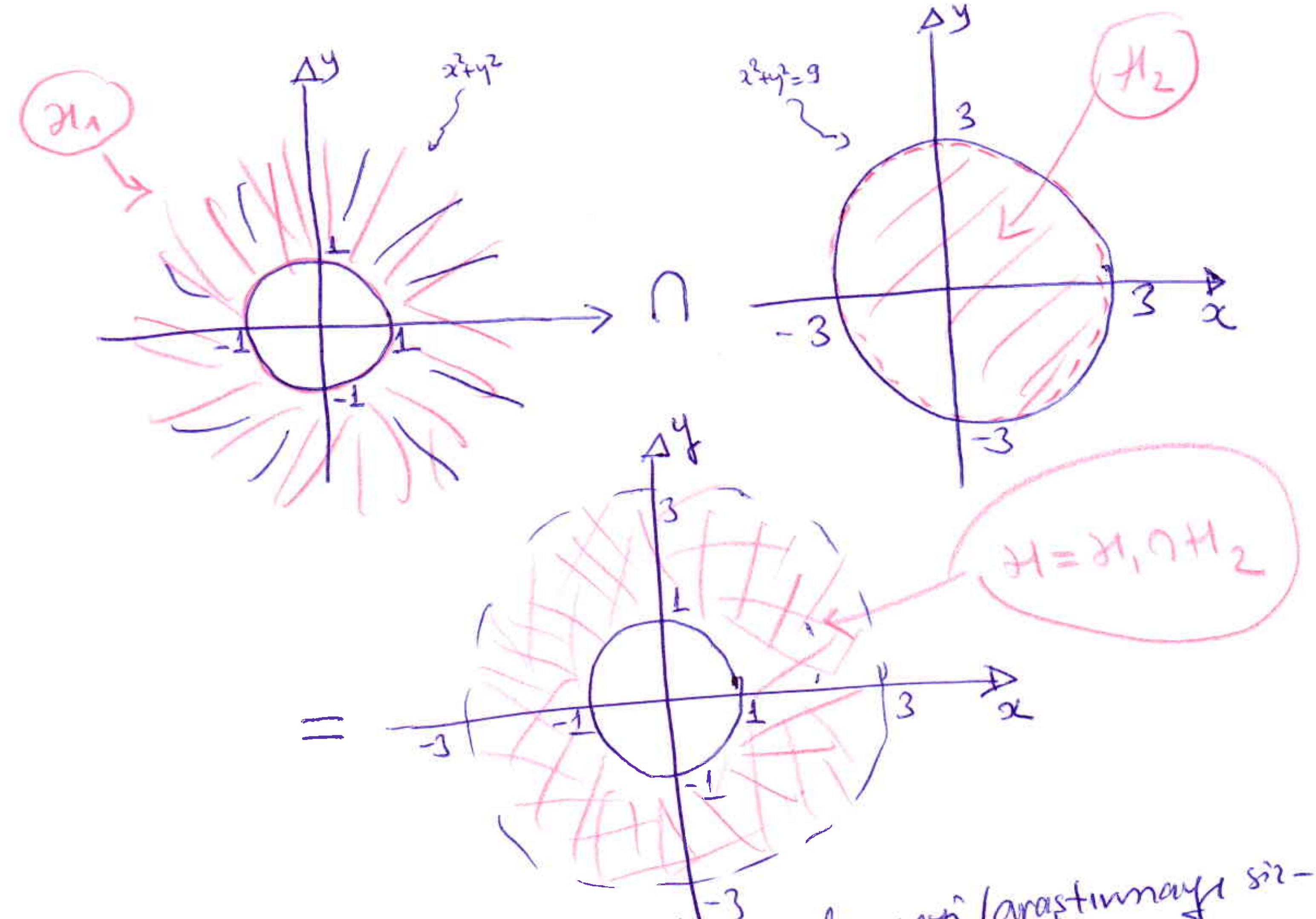
Soru-1-(b): $(x,y)\in\mathcal{H} \Leftrightarrow [1\le x^2+y^2<9]$

$$\Leftrightarrow [1\le x^2+y^2 \text{ ve } x^2+y^2<9]$$

olduğuna göre, $\mathbb{R}^2$-de hem

$\mathcal{H}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\}$ hem de

$\mathcal{H}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<9\}$ kümelerini çizmek zorundayız. Çünkü, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2$ dır.



İsteyen kümeler için detaylı incelemeyi/araştırmayı sizlere bırakıp; $\mathring{\mathcal{H}}$, $\partial(\mathcal{H})$ ve $\bar{\mathcal{H}}$ kümelerini sadece vermekle yetiniyorum.

$\overset{\circ}{\mathcal{H}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 9\}$,

$\partial(\mathcal{H}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 = x^2+y^2 \text{ veya } 9 = x^2+y^2\}$

ve

$\overline{\mathcal{H}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9\}$ olur.

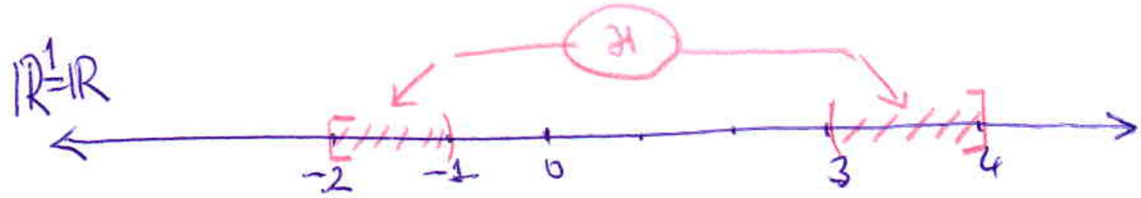
(c): $x\in\mathcal{H} \iff 4 < (x-1)^2 \le 9 \iff 2 < |x-1| \le 3$

$\iff [2 < x-1 \le 3 \text{ veya } -3 \le x-1 < -2]$

$\iff [3 < x \le 4 \text{ veya } -2 \le x < -1]$

$\iff x\in(3,4] \vee x\in[-2,-1)$

olur. O halde, $\mathbb{R}^1$ uzayında ilgi yarı-açık-yarı-kapalı bildiğimiz aralıklar söz konusu olur.



* Yol bağlantılı olmadığı açıktır. (Tartışınız!)
* Bağlantılı dır. (Çünkü, açık olmayan $\mathcal{H}$ kümesi açık ve kesişimleri $\emptyset$ olan iki H ve G gibi iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan bir kümedir.)

SORU-3-(b): $f(x,y,z) = \dfrac{2x-y+z}{z-2y-x}$ fonksiyonunun en geniş kümesi, yani $D_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z-2y-x \neq 0\}$ kümesi olup ve kolayca verilen limit noktasının, yani $(-1,1,0)\in D_f$ olduğu kolayca görülmektedir. O halde, aranan limit noktası $f(-1,1,0)$ olacağı açıktır. 3 Bu da, $f(-1,1,0) = 3$ tür.

Gösterilmek istenen: $\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} f(x,y,z) = 3$ olduğudur.

Yani, $\forall \varepsilon>0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta>0$ sayısını bulmalıyız ki öyleki

$$|x-(-1)| = |x+1| < \delta, \quad |y-1| < \delta \text{ ve } |z-0| = |z| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z) \in D_f$ için

$$\left| f(x,y,z) - w_0 \right| = \left| \frac{2x-y+z}{z-2y-x} - 3 \right| < \varepsilon$$

olsun. Bakalım/araştıralım:

$\varepsilon>0$ keyfi sayısı verilsin. O zaman

$$\left| \frac{2x-y+z}{z-2y-x} - 3 \right| = \left| \frac{2x-y+z-3z+6y+3x}{z-2y-x} \right|$$

$$= \frac{|5x+5y-2z|}{|z-2y-x|}$$

$$= \frac{|5(x+\overbrace{1-1}^{0}+y)-2z|}{|z-2y-x|}$$

$$\leq \frac{5|x+1|+5|y-1|+2|z|}{|z-2y-x|}$$

$$< \frac{5\delta+5\delta+2\delta}{|z-2y-x|}$$

$$= \frac{12\delta}{|z-2y-x|} \quad \ldots (*)$$

olup $\dfrac{1}{|z-2y-x|}$ ifadesi için bir üst sınır belirlemek zorundayız. Bunun için

$$|x+1|<\delta \iff -\delta < x+1 < \delta \iff -1-\delta < x < \delta-1,$$

$$|y-1|<\delta \iff -\delta < y-1 < \delta \iff 1-\delta < y < 1+\delta$$

ve

$$|z|<\delta \iff -\delta < z < \delta$$ olup bu eşitsizlerden

kolayca

$$1-\delta < y < 1+\delta \iff -1-\delta < -y < \delta - 1$$

$$\iff \boxed{-2(1+\delta) < -2y < 2(\delta-1)}$$

$$-1-\delta < x < \delta - 1 \iff \boxed{-1+\delta < -x < 1+\delta}$$

$$+\quad \boxed{-\delta < z < \delta}$$

$$-(3+2\delta) < z-2y-x < 4\delta - 1$$

$$\iff |4\delta-1| < |z-2y-x| < 3+2\delta$$

$$\Rightarrow 1-4\delta < |z-2y-x| < 3+2\delta \quad (0<\delta<1/4)$$

$$\iff \frac{1}{3+2\delta} < \boxed{\frac{1}{|z-2y-x|} < \frac{1}{1-4\delta}} \quad (0<\delta<1/4)$$

(**)

elde edilir. (**) eşitsizliği (*)'da göz önüne alınırsa, kolayca,

$$\left|\frac{2x-y+z}{z-2y-x}-3\right| = \cdots\cdots$$

$$< \frac{12\delta}{|z-2y-x|}$$

$$< \frac{12\delta}{1-4\delta} < \varepsilon, \quad \text{eğer}$$

$$\delta := \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{12+4\varepsilon}\right\} = \frac{\varepsilon}{12+4\varepsilon} \quad \text{seçilirse.}$$

O halde, $\forall \varepsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde

$$|x+1| < \delta := \frac{\varepsilon}{12+4\varepsilon}, \quad |y-1| < \delta := \frac{\varepsilon}{12\cancel{+4}+4\varepsilon} \text{ ve } |z| < \delta := \frac{\varepsilon}{12+4\varepsilon}$$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\left|\frac{2x-y+z}{z-2y-x}-3\right| < \varepsilon \quad \text{daima doğru olur.}$$

$\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan dolayı,

$$\frac{2x-y+z}{z-2y-x} \to 3 \equiv \lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \frac{2x-y+z}{z-2y-x} = 3$$

olur. ☺

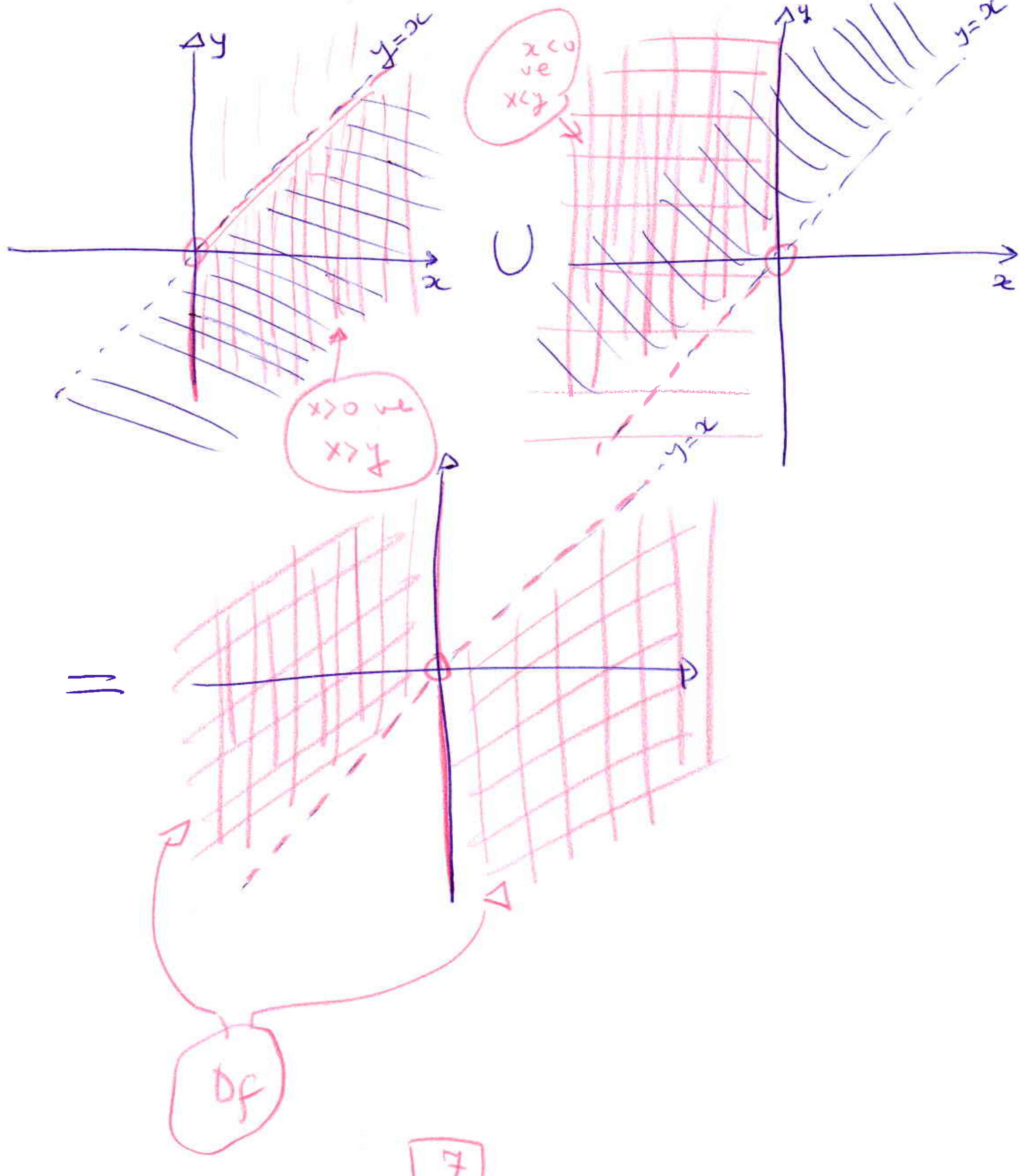
Soru-3-(c): Logaritma fonksiyonunun tanımlanışı gereği $\dfrac{x}{x-y} > 0$ olmak zorundadır. Buna göre:

$$\frac{x}{x-y} > 0 \iff \Big[(x>0 \text{ ve } x-y>0) \text{ veya } (x<0 \text{ ve } x-y<0)\Big]$$

olmalıdır. Bunun için;

$[x>0 \text{ ve } x-y>0]$
$\iff [x>0 \text{ ve } x>y]$

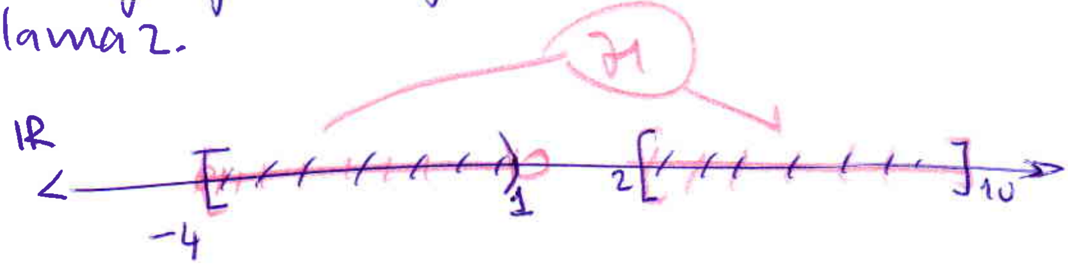
$[x<0 \text{ ve } x-y<0]$
$\iff [x<0 \text{ ve } x<y]$



Soru-4-(a): Olabilir de olmayabilir de. Bunun için farklı (olabilen ve olmayabilen) iki farklı örnek vermek zorundayız. Bunu da;

$n=1 \Rightarrow \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ için verelim:

(*) $\mathcal{H} = [-4,1) \cup [2,10]$ kümesi ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan bir kümedir. Dolayısıyla bağlantılıdır. Ama yol bağlantılı olamaz.



(**) $\mathcal{H} = (-5, 3)$ kümesi de ayrık ve açık olan iki kümenin birleşimi olarak yazılamaz. Dolayısıyla bağlantılıdır. ~~Ama~~ yol bağlantılıdır da.

Sizler de

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de ikişer örnek veriniz.