MAT 201 - Analiz III
CEVAP KAĞIDI

Soru: Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve seçtiğiniz bu fonksiyonun verilen noktadaki limitini o noktadan geçen ve belirleyeceğiniz bir parametrik eğri boyunca araştırınız. Eğer ilgili limit var ise, bu sonuç ilgili fonksiyonun verilen noktadaki gerçek limiti olur mu? Neden? Araştırınız. (100p.)

a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $(1,-1)$ *ya da* **b)** $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x+y}$, $(1,0,1)$

Çözüm - (a): Önce $(1,-1)$ noktasından geçen bir parametrik eğriye ihtiyacımız var. Bunun için, ilgili noktadan geçen en kolay yoldan oluşturabileceğimiz bir fonksiyon belirleyip ve bundan yararlanarak istenen için bir parametrik eğri oluştuma yoluna gidelim:

$l_m : y - y_0 = m(x - x_0)$ genel formu olan doğru denkleminden kolayca, $(x_0, y_0) = (1,-1)$ için $l_m : y-(-1) = m(x-1) \;\Rightarrow\; l_m : y+1 = m(x-1) \;\Rightarrow\; l_m : y+1 = m(x-1)$ elde edilir ve bunlardan bir tanesini belirlemek istersek, örneğin, $m = 1$ için $l_1 : y+1 = 1\cdot(x-1) \;\Rightarrow\; l_1 : y = x-2$ elde edilir. Eğer bu doğru denkleminde $x = x(t) = t$ ve $y = y(t) = t-2$ parametrik form oluşturulursa $l(t) : \big(x(t), y(t)\big) = (t, t-2)$ istenen parametrik eğrilerden biri belirlemiş olur. Kolayca, $t \to 1$ iken $(t, t-2) \to (1,-1)$ olduğu açıktır. O halde,

$$lim_{l(t)\ni(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = lim_{l(t)\ni(x,y)\to(1,-1)} \tfrac{y}{x} = lim_{t\to1} \tfrac{y(t)}{x(t)} = lim_{t\to1} \tfrac{t-2}{t} = -1$$

olduğu Analiz I-II bilgisinden kolayca elde edilir. İlgili parametrik eğrinin oluşturduğu küme ilgili limit noktasının gerçek komşulu- ğunun özel bir alt kümesi konumunda olduğundan dolayı, elde etmiş olduğumuz limitin sonucu doğal olarak verilen iki değişkenli fonksiyonun ilgili limit noktasındaki gerçek limiti olmak zorunda değildir. Yani, ilgili limit sadece sadece iki değişkenli fonksiyon için ya bir limit adayıdır ya da gerçek limit değeri değildir. Bunun için, $\epsilon - \delta$ ilişkisiyle $lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y}{x} = -1$ olup olmadığını göstermek durumundayız. Yani, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki

$$U_\delta\Big((1,-1)\Big) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \big|x-1\big| < \delta \;ve\; \big|y-(-1)\big| = \big|y+1\big| < \delta\Big\}$$

kümesindeki her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\Big|f(x,y) - (-1)\Big| = \Big|\frac{y}{x} + 1\Big| < \epsilon$

olsun. Buna göre, $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verilsin. Bu durumda, kolayca

$$\big|f(x,y)+1\big| = \Big|\tfrac{y}{x}+1\Big| = \Big|\tfrac{y+x}{x}\Big| = \Big|\tfrac{y+1-1+x}{x}\Big| = \Big|\tfrac{(y+1)+(x-1)}{x}\Big| \le \tfrac{|y+1|+|x-1|}{|x|} < \tfrac{\delta+\delta}{|x|} = \tfrac{2\delta}{|x|} \cdots \;(*)$$

sonucu elde edilir. Burada hem $|x|$ için bir üst sınır belirlemek durumundayız. $(*)$'daki eşitsizlik basit bir eşitsizlik olup, aranan $\delta > 0$ sayısının belirlenmesinde herhangi bir kısıtlamaya gerek olmadığından dolayı, isteneni kolayca bulabiliriz. Yani,

$$|x-1| < \delta \;\Rightarrow\; \delta < x-1 < \delta \;\Rightarrow\; 1-\delta < x < 1+\delta$$
$$\Rightarrow\; 1-\delta < |x| < 1+\delta \;\Rightarrow\; 1/(1+\delta) < 1/|x| < 1/(1-\delta)$$

olarak elde ederiz, tabii ki $0 < \delta < 1$ koşulu altında. Üstteki eşitsizlik $(*)$'da verilen eşitsizlikte göz önüne alınırsa,

$$\big|f(x,y)+1\big| = \;\cdots\; < \tfrac{2}{|x|} < \tfrac{2\delta}{1-\delta} < \epsilon$$

olur, eğer $\delta := \delta(\epsilon) := \min\Big\{\epsilon, \frac{\epsilon}{2+\epsilon}\Big\} = \frac{\epsilon}{2+\epsilon}$ seçilirse.

O halde, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde $\delta := \frac{\epsilon}{2+\epsilon}$ seçilirse,

$$\forall(x,y) \in U_{\frac{\epsilon}{2+\epsilon}}\Big((1,-1)\Big) = \Big\{\big|x-1\big| < \delta := \tfrac{\epsilon}{2+\epsilon} \;\; ve \;\; \big|y+1\big| = \big|y+1\big| < \delta := \tfrac{\epsilon}{2+\epsilon}\Big\}$$

için $\Big|f(x,y)+1\Big| < \epsilon$ eşitsizliği daima doğru olur. Bu ise, $lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y}{x} = 1$ demektir.