

100
100

KISIMEN ÇÖZÜMLER

05 / 01 / 2017

MAT 201 - Analiz III / Final Soruları (Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK

No.: 25 25 25

İmza :

! SADECE 4 (DÖRT) SORU SEÇİLECEK ve SEÇİLEN SORULARDAKİ İSTEN(LER) GERÇEKLEŞTİRİLECEKTİR

Soru 1) [25p.] Verilenlerden önce birini seçiniz. Seçtiğiniz soruda isteneni belirlemek için oluşturacağımız bir parametrik eğriyi kullanınız. Bu bulduğumuz sonuç, isteneni için gerçek sonuç olup olmadığını da $\epsilon - \delta$ ilişkisiyle gösteriniz: (a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{x-z}{y+z} = ?$

(b) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) \Big|_{(-1,-1)} = ?$ (c) $f(x,y,z) = \frac{x-y}{y+z}$ fonksiyonunun $(1,0,1)$ 'daki sürekliliğini

Soru 2) $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z) = \langle xy, yz, x-y+z \rangle$ fonksiyonu için; (a) $g(x,y,z) = \text{div}(\vec{f}) = ?$ [5p.], (b) $\vec{h}(x,y,z) = \text{rot}(\vec{f}) = ?$ [5p.], (c) $\text{grad}(g) = ?$ [5p.], (ç) $\nabla^2 g = ?$ [5p.], (d) $\nabla \cdot \vec{h} = ?$ [5p.]

Soru 3) [25p.] Verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve istenilen kısmi türevleri bulunuz: (a) $f(x,y,z) = z \ln(x+y)$ ise $f_{zxy} = ?$ (b) $f(x,y,z) = y \tan^{-1}(z-x)$ ise $f_{yzx} = ?$ (c) $F(x,y,z) = z f(xy, x^2 - y^2) - g(xy, z, 2z - x + 2y)$ ise $F_{zy} = ?$ (ç) $f(x,y,z) = z [\text{Sin}(zy)]^{\cos(x-z)}$ ise $f_z = ?$

Soru 4) [25p.] Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve isteneni yapınız.

a) $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) > 0\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme açık mıdır? Kapalı mıdır? Tıkız mıdır? Neden?

b) $\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme, bağlantılı mıdır? Yol bağlantılı mıdır? Bölge midir? Neden?

c) $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x+y| = 1\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu kümenin iç noktalarının, yığılma noktalarının ve sınır noktalarının oluşturduğu kümelerini belirleyiniz.

Soru 5) [25p.] Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece birini seçiniz ve isteneni gerçekleştiriniz.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevleri var mıdır? Neden? Araştırmamız.

(b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x-y^2-z}{x+y^2-z} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ ise} \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu $(0,0,0)$ noktasında sürekli midir? Neden? Araştırmamız.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\text{Sin}(x-y)}{x+y} & , (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti var mıdır? Neden? Araştırmamız.

Başarılar . . .

SORU-1-) Her üç istenenin sonuçta ϵ - δ ilişkisiyle ispatı istediğine göre, her üçü içinde limit ilişkisiyle durumu göz önüne almalı durumundayız.

Çözüm-1:) İpili limitin önce oluşturacağımız bir parametrik eğriyle belirlenmesi istediğine göre;

$T: \begin{cases} x=x(t)=t \\ y=y(t)=t-1 \\ z=z(t)=-t \end{cases}$ zekinde tanımlarsak, bu T parametrik eğrinin $(1,0,-1)$ noktasından geçtiği de kolayca görülür: Yani,

$$t \rightarrow 1 \Leftrightarrow (x,y,z) \rightarrow (1,0,-1) \text{ du.}$$

Şimdi, gerçekten parametrik eğriyle / eğri boyunca limitin olup olmadığına bakalım. Yani,

$$\begin{aligned} \lim_{T \ni (x,y,z)} f(x,y,z) &= \lim_{t \rightarrow 1} f(x(t), y(t), z(t)) \quad \left(f(x,y,z) = \frac{x-z}{y+z} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{x(t)-z(t)}{y(t)-z(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-(-t)}{t-1+(-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Acaba,

$$\lim_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} f(x,y,z) = -2 \text{ mi?}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bunun içinde ϵ - δ ilişkisine geçmek durumundayız.

Yani, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyle ki

$$|x-1| < \delta, |y| < \delta \text{ ve } |z+1| < \delta$$

kosulunu sağlayan her $(x, y, z) \in D_f$ için

$$\left| f(x, y, z) + 2 \right| = \left| \frac{x-z}{y+z} + 2 \right| < \varepsilon \text{ olsun.}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi sayısı verilsin. 0 zaman,

$$\left| \frac{x-z}{y+z} + 2 \right| = \left| \frac{x-z+2y+2z}{y+z} \right| = \left| \frac{x+y+z}{y+z} \right|$$

$$= \frac{|(x-1)+y+(z+1)|}{|y+z|}$$

$$\leq \frac{|x-1| + |y| + |z+1|}{|y+z|}$$

$$\leq \frac{\delta + 2\delta + \delta}{|y+z|} = \frac{4\delta}{|y+z|} \dots (*)$$

esitsizliği elde edilir. Burada, $\frac{1}{|y+z|}$ için bir üst sınır belirlemek durumundayız. Haydi belirleyelim:

$$|y| < \delta \Leftrightarrow -\delta < y < \delta$$

$$|z+1| < \delta \Leftrightarrow -\delta < z+1 < \delta \Leftrightarrow -1-\delta < z < \delta-1$$

+

$$-1-2\delta < y+z < \delta-1$$