100/100 ☺

KISMEN ÇÖZÜMLER

~~05~~ / 01 / 2017

MAT 201 - Analiz III / Final Soruları
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

! SADECE 4 (DÖRT) SORU SEÇİLECEK ve SEÇİLEN SORULARDAKİ İSTEN(LER) GERÇEKLEŞTİRİLEÇEKTİR

Soru 1) [25p.] Verilenlerden *önce birini seçiniz.* Seçtiğiniz soruda isteneni belirlemek için oluşuracağınız bir parametrik eğriyi kullanınız. Bu bulduğunuz sonuç, istenen için gerçek sonuç olup olmadığını da $\epsilon - \delta$ ilişkişiyle gösteriniz: **(a)** $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{x-z}{y+z} = ?$

(b) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{(-1,-1)} = ?$ **(c)** $f(x,y,z) = \frac{x-y}{y+z}$ fonksiyonun $(1,0,1)$'daki sürekliliğini

Soru 2) $\vec{f} = \vec{f}\ (x,y,z) = \langle xy, yz, x-y+z\rangle$ fonksiyonu için; **(a)** $g(x,y,z) = div(\vec{f}) = ?$ [5p.], **(b)** $\vec{h}\ (x,y,z) = rot(\vec{f}) = ?$ [5p.] , **(c)** $grad(g) = ?$ [5p.] , **(ç)** $\nabla^2 g = ?$ [5p.] , **(d)** $\nabla \cdot \vec{h} = ?$ [5p.]

Soru 3) [25p.] Verilen fonksiyonlardan sadece ***birini seçiniz*** ve istenilen kısmi türevleri bulunuz: **(a)** $f(x,y,z) = z\ln(x+y)$ ise $f_{zxy} = ?$ **(b)** $f(x,y,z) = y\tan^{-1}(z-x)$ ise $f_{yzx} = ?$ **(c)** $F(x,y,z) = zf(xy, x^2-y^2) - g(xy, z, 2z-x+2y)$ ise $F_{zy} = ?$ **(ç)** $f(x,y,z) = z[Sin(zy)]^{cos(x-z)}$ ise $f_z = ?$

Soru 4) [25p.] Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız.

a) $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) > 0\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme açık mıdır? Kapalı mıdır? Tıkız mıdır? Neden?

b) $\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme, bağlantılı mıdır? Yol bağlantılı mıdır? Bölge midir? Neden?

c) $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x+y| = 1\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu kümenin iç noktalarının, yığılma noktaların ve sınır noktalarının oluşturduğu kümelerini belirleyiniz.

Soru 5) [25p.] Aşağıda verilen fonksiyonlardan sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni gerçekleştiriniz.

(a) $f(x,y) = \left\{\begin{array}{ccc} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , & (x,y) \neq (0,0)\ ise \\ 0 & , & (x,y) = (0,0)\ ise \end{array}\right\}$ fonksiyonu için $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ kısmi türevleri var mıdır? Neden? Araştırınız.

(b) $f(x,y,z) = \left\{\begin{array}{ccc} \frac{x-y^2-z}{x+y^2-z} & , & (x,y,x) \neq (0,0,0)\ ise \\ 0 & , & (x,y,z) = (0,0,0)\ ise \end{array}\right\}$ fonksiyonu $(0,0,0)$ noktasında sürekli midir? Neden? Araştırınız.

(c) $f(x,y) = \left\{\begin{array}{ccc} \frac{Sin(x-y)}{x+y} & , & (x,y,x) \neq (0,0)\ ise \\ 0 & , & (x,y,z) = (0,0)\ ise \end{array}\right\}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limiti var mıdır? Neden? Araştırınız.

Başarılar . . .

Ders ve Sınav Sorumlusu: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK (ÇAKÜ, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

SORU-1-) Her üçü istenenin sonuçta $\varepsilon-\delta$ ilişkisiyle ispatı istendiğine göre, her üçü içinde limit ilişkisiyle durumu göz önüne almalı durumundayız.

ÇÖZÜM-a;) İkili limitin önce oluşturacağımız bir parametrik eğriyle belirlenmesi istendiğine göre;

$$T : \begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t-1 \\ z = z(t) = -t \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, bu T parametrik eğrinin $(1,0,-1)$ noktasından geçtiğide kolayca görülür: Yani,

$$t \to 1 \iff (x,y,z) \to (1,0,-1) \text{ dır.}$$

Şimdi, gerçekten parametrik eğriyle / eğri boyunca limitin olup olmadığına bakalım. Yani,

$$\lim_{T \ni (x,y,z)} f(x,y,z) = \lim_{t\to 1} f(x(t),y(t),z(t)) \qquad \left(f(x,y,z) = \frac{x-z}{y+z} \right)$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{x(t)-z(t)}{y(t)-z(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{t-(-t)}{t-1+(-t)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{2t}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

elde ederiz. Acaba,

$$\lim_{\begin{pmatrix} x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\end{pmatrix}} f(x,y,z) = -2 \text{ mi ?}$$

Bunun içinde $\varepsilon-\delta$ ilişkisine geçmek durumundayız.

Yani, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyle ki

$$|x-1| < \delta, \quad |y| < \delta \quad \text{ve} \quad |z+1| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $(x,y,z) \in D_f$ için

$$\left| f(x,y,z) + 2 \right| = \left| \frac{x-z}{y+z} + 2 \right| < \varepsilon \text{ olsun.}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi sayısı verilsin. O zaman,

$$\left| \frac{x-z}{y+z} + 2 \right| = \left| \frac{x-z+2y+2z}{y+z} \right| = \left| \frac{x+2y+z \overset{\overset{0}{\widetilde{+1-1}}}{\downarrow}}{y+z} \right|$$

$$= \frac{|(x-1)+2y+(z+1)|}{|y+z|}$$

$$\leq \frac{|x-1| + 2|y| + |z+1|}{|y+z|}$$

$$< \frac{\delta + 2\delta + \delta}{|y+z|} = \frac{4\delta}{|y+z|} \quad \cdots (*)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $\frac{1}{|y+z|}$ için bir üst sınır belirlemek durumundayız. Haydi belirleyelim:

$$|y| < \delta \iff -\delta < y < \delta$$

$$|z+1| < \delta \iff -\delta < z+1 < \delta \iff -1-\delta < z < \delta - 1$$

$$+$$

$$-1-2\delta < y+z < \delta - 1$$