

1.4. Reel (Gerçel) Değerli Fonksiyon Dizileri

Şimdi önemli bir dizi türü olan (gerçel) değerli fonksiyon dizilerini ele alalım. Butür diziler hem teorik hem de uygulama boyutu açısından oldukça önemli olan dizilerdir. İşe tanımıyla başlayalım.

Tanım 1.10.

(i) Her $n \in \mathbb{N}_m$ olmak üzere, boş kümeden farklı bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanan fonksiyonlara reel (gerçel) değerli fonksiyon dizisi veya kısaca fonksiyon dizisi adı verilir.

Dizilerdeki gösterim tarzımız gereği,

$$(u_n(x)) , (u_n(x))_{n=m} , (u_n(x))_{n=m}^{\infty} , (u_n(x))_m \text{ veya } (u_n(x))_m^{\infty}$$

şeklindeki gösterimlerinden herhangi biri ile gösterildiği gibi “fonksiyon dizisi” sözcükleri ile beraber $u_n(x)$ genel terimiyle de ifade edilir.

O halde, bir fonksiyon dizisinin $u_n(x) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki bir fonksiyonu ifade edeceği açıktır. Doğal olarak, verilen her bir $(u_n(x))_m^{\infty}$ fonksiyon dizisinin, her $n \in \mathbb{N}_m$ ve her $x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ tanımlı olması gerektiğinden dolayı, ilgili m doğal sayısının ve $\mathbb{I}$ kümesinin uygun olarak belirlenmesi esastır. Aksi taktirde fonksiyon yapısını bozacak (tanımsızlık gibi) bir durumla karşılaşılabilir.

(ii) Bir $(u_n(x))_m$ reel (gerçel) değerli fonksiyon dizisi verilsin. Yine dizilerde belirttiğimiz gibi

$$(u_m(x), u_{m+1}(x), u_{m+2}(x), \dots, u_{m+n-1}(x), \dots)$$

veya

$$\{u_m(x), u_{m+1}(x), u_{m+2}(x), \dots, u_{m+n-1}(x), \dots\}$$

şeklindeki açık formu da gerektiğinde kullanılabilir. Doğal olarak, $u_m(x)$ ’lerin her biri ilgili fonksiyon dizisinin birer terimi olacaktır. Bunlar da sırasıyla ilgili fonksiyon dizisinin 1. terimi, 2. terimi, ..., n . terimi (veya genel terimi) şeklinde adlandırılır.

Örnek 1.12.

a) $(u_n(x))_m = (x/n)$ gibi bir reel (gerçel) değerli fonksiyon dizisi için ilgili m bir doğal sayısı $m \in \mathbb{N}^+$ olacak şekilde her bir doğal sayı seçilebilir. Ayrıca, ilgili x bilinmeyen her $x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ için seçim de mümkün olmalıdır. Örneğin; $\mathbb{I} = (-1, 1)$, $\mathbb{I} = [-3, 3]$, $\mathbb{I} = (-\infty, 5]$, $\mathbb{I} = [-5, \infty)$, ... gibi. Eğer açık forma gerek var ise, bu da

$$(u(x))_1 = (x/n)_1 = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots) = (x/1, x/2, x/3, \dots, x/n, \dots)$$

şeklindeki $u_n(x) : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{x}{n}$ fonksiyonu olacaktır.

b) $(u(x))_m = (n/x)$ gibi bir reel (gerçel) değerli fonksiyon dizisi için ilgili m her bir doğal sayısı, yani $m \in \mathbb{N}$ olacak şekilde seçim yapılabilir. İlgili x bilinmeyenini seçimi de payda meselesinden dolayı her $x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ olacak şekilde seçimle mümkün olur. Örneğin; $\mathbb{I} = (-4, 0)$, $\mathbb{I} = [-13, -3]$, $\mathbb{I} = (-\infty, -5]$, $\mathbb{I} = [5, \infty)$, $\dots$ gibi. Eğer açık forma gerek var ise, bu da

$$(u_n(x))_0 = (n/x)_0 = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots) = (0/x, 1/x, 2/x, \dots, n/x, \dots)$$

şeklindeki $u_n(x) : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{n}{x}$ bir fonksiyonu olacaktır.

Alıştırırmalar 1.10. Aşağıda çeşitli (reel) sayı dizileri verilmiştir. Her biri için önce uygun bir m doğal sayısını ve birkaç $\mathbb{I}$ kümesi belirleyiniz ve ardından da açık formlarını belirleyiniz.

$$\left(\frac{\sin x}{n}\right), (nx), (x^n), \left(\frac{n}{x-4}\right), \left(\frac{nx}{nx+1}\right), (n-x), (n-\sqrt{x}), (e^{-nx}), \left(\frac{n}{e^x}\right),$$

$$\left(\frac{\cos x}{n^2}\right), (n\sqrt{x}), ((1-x)^n), \left(\frac{x}{n^2+1}\right), \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right), \left(\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right), (xe^{-n}), \left(\frac{1}{ne^x}\right).$$

Herhangi bir $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı olarak verilen bir $(u_n(x))_{n_0}$ gibi bir fonksiyon dizisinin genel terimi olan $u_n(x)$ fonksiyonunun sınırlılığın bazen önem taşıyabilmektedir. Literatürde bazı özel isimlerle adlandırılan bu sınırlılık durumlarını vurgulamakta fayda görmekteyiz.

$u_n(x) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ genel terimli bir $(u_n(x))_{n_0}$ fonksiyon dizisi her $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ ve her $x \in \mathbb{I}$ için

$$|f_n(x)| \leq \mathcal{M}, \quad |f_n(x)| \leq \mathcal{M}(x), \quad |f_n(x)| \leq \mathcal{M}(n) \text{ ve } |f_n(x)| \leq \mathcal{M}(n, x)$$

gibi sınırlamalarla karşılaşabilmekteyiz. Bu ders ve paralelinde, özellikle $\mathcal{M}(n)$ ve $\mathcal{M}(x)$ şeklindeki sınırlamalar bizler için önemli olabilmektedir. Bu durumları örneklendirmek istersek:

Örnek 1.13.

a) $\mathbb{I} = [-6, 5]$ ve $\left(\frac{x}{n}\right)_1$ olsun. o zaman, $\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|-6|}{1} \leq 6$ olacak şekilde bir pozitif $\mathcal{M} = 6$ sayısı ile sınırlanabilmektedir.

b) $\mathbb{I} = [-1, \infty)$ ve $\left(\frac{x}{n}\right)_1$ olsun. O zaman, $\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{1} \leq |x|$ olacak şekilde bir $\mathcal{M}(x)$ fonksiyonu ile sınırlanabilir.

c) $\mathbb{I} = (0, 1)$ ve $\left(\frac{x}{x+n}\right)_1$ olsun. o zaman, $\left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{|x|}{|x+n|} = \frac{|x|}{x+n} \leq \frac{|x|}{n} \leq |x| = x \leq 1$ gözönüne alınırsa, karşımıza çıkabilecek problemlerin ruhuna göre; $\mathcal{M}(x, n) = \frac{x}{n}$, $\mathcal{M}(x) = x$, $\mathcal{M}(n) = \frac{1}{n}$ veya $\mathcal{M} \leq 1$ gibi sınırlanacağı da mümkündür.

ç) $\mathbb{I} = (0, \infty)$ ve $\left(\frac{x}{x+n}\right)_1$ olsun. O zaman, $\left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{|x|}{|x+n|} \leq \frac{x}{n} \leq x$ olur. Bu durumda da, ilgili sınırlılık $\mathcal{M}(x) = x$ şeklinde olmak zorunda olur.

d) $\mathbb{I} = [-1, 1]$ ve $\left(\frac{nx}{x^2+n^2}\right)_1$ olsun. O zaman, $\left|\frac{nx}{x^2+n^2}\right| = \frac{|nx|}{x^2+n^2} \leq \frac{n|x|}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n}$ şeklindeki bir sınırlama da olabilir. (Burada, $\frac{1}{n} = \frac{1}{1} \leq 1$ şeklinde ki bir sınırlama da yapabiliydik!)

Taktir edersiniz ki verilen bir fonksiyon dizisi tanımlı olduğu $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ kümesinden alınan bazı x_0 sayıları için yakınsak ya da ıraksak olabilir. Eğer, bir $x_0 \in \mathbb{I}$ için $(x_n) = (f_n(x_0))_0$ yakınsak ise o diziye x_0 noktasında yakınsaktır denir ve benzeri olarak bir $x_0 \in \mathbb{I}$ için $(x_n) = (u_n(x_0))_{n_0}$ ıraksak ise o diziye x_0 noktasında ıraksaktır denir. Eğer, her $x \in \mathbb{I}$ için $(u_n(x))_{n_0}$ dizisi yakınsak ise o diziye $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde yakınsaktır ve yine her $x \in \mathbb{I}$ için $(u_n(x))_{n_0}$ dizisi ıraksak ise o diziye $\mathbb{I}$ kümesinde ıraksaktır denir. Şimdi butür, yani fonksiyon dizilerinin yakınsama durumlarını ele alalım.

Önemli konulardan biri olan sayı dizilerinin limitlerinden (veya yakınsaklıklarından) bahsetmiştik. Elbette ki bu kavran fonksiyon dizileri için de oldukça önemlidir. Fonksiyon dizileri için de her $x \in \mathbb{I}$ gibi reel sayılarının seçimiyle doğal olarak $(x_n) = (f_n(x))_m$ gibi reel (gerçel) sayı dizileri ile karşı karşıya geleceğimiz açıktır. Böylesi bir durumda, herbir $x \in \mathbb{I}$ sayısının seçimiyle elde edilen sayı dizilerinin elbette ki bir limiti söz konusu olabilir. Diyelim her $x \in \mathbb{I}$ için $(x_n) = (f_n(x))$ sayı dizisinin bir limiti var ve x 'e göre değişebilecek bu limitin de $f(x)$ gibi bir fonksiyon olacağını düşünelim. Bu durumda, $(f_n(x))$ fonksiyon dizisinden daima bir $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu elde ederiz. Böylesi bir durumda, elde edilen bu $f(x)$ fonksiyonu ilgili fonksiyon dizisinin bir limitinin olabilmesi söz konusu olur. Öyle de diyeceğiz. Tabii ki bu limitler herbir $x \in \mathbb{I}$ için elde edileceği için, ilgili limit yerine noktaya göre değişen bir limit, kısacası "noktasal limit" sözünü kullanmayı tercih edeceğiz. Şimdi, fonksiyon dizileri için oldukça önemli olan bu kavramları tanımlayalım.

Tanım 1.11. Herhangi bir $\mathbb{I}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden ve tanımlı olan bir $(f_n(x))_m$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer her $x \in \mathbb{I}$ için $(f_n(x))$ (reel sayı) dizisinin bir limiti varsa ve bu da $f(x)$ gibi fonksiyon ise, $(f_n(x))$ fonksiyon dizisi $f(x)$ fonksiyonuna *noktasal yakınsıyor* denir ve bu durum her $x \in \mathbb{I}$ için

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken}) \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

şeklinde gösterilir. Bazen de, özellikle noktasal yakınsamayı vurgulamak adına,

$$f_n(x) \xrightarrow{(n)} f(x) \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken}) \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{(n)}{=} f(x)$$

şeklindeki gösterimler de kullanılabilir.

Dizilerden hatırlayacağınız gibi, aranan N doğal sayısının $\epsilon > 0$ keyfi sayısına göre belirlendiği ve bu durumu da sık sık $N = N(\epsilon)$ şeklinde gösterdiğimiz belirtmiştik. Burada ise, yani fonksiyon dizilerinde aranan N doğal sayısının belirlenmesi hem $\epsilon > 0$ keyfi sayısına hem de $x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ sayısına göre değişeceği açıktır. Doğal olarak, ilgili doğal sayı $N = N(x, \epsilon)$ veya $N = N_\epsilon(x)$ şeklindeki gösterimle de belirtilmesi söz konusu olabilmektedir. Bu her iki gösterim durumu, fonksiyon dizilerinin limitinde oldukça önemlidir.

Öncelikli olarak, noktasal yakınsamaya ilişkin bazı örneklerle işe başlamakta fayda bulunmaktadır.

Örnek 1.14.

a) $(f_n(x))_m = \left(\frac{x}{n}\right)_m$ fonksiyon dizisi için $m \geq 1$ doğal sayısını seçimi sıkıntı oluşturmaz. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}^+$ için ve herhangi bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ kümesindeki her bir x için $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ olduğu kolayca açıktır. O halde, $\frac{x}{n} \xrightarrow{(n)} 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{(n)}{=} 0$ dır.

b) $(f_n(x))_m = \left(\frac{nx}{n+1}\right)_m$ fonksiyon dizisi için de $m \geq 1$ seçimi uygun olur. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}_1$ için ve herhangi bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ kümesindeki her bir x için $\frac{nx}{n+1} \rightarrow x$ olduğu kolayca görülür. O halde, $\frac{nx}{n+1} \xrightarrow{(n)} x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n+1} \stackrel{(n)}{=} x$ dır.

c) $(f_n(x))_m = \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)_m$ fonksiyon dizisi için de yine $m \geq 0$ seçimi yine uygun olur. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}^+$ için ve herhangi bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ kümesindeki her bir x için $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ olacağına göre ve $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \rightarrow \cos(1)$ dır. O halde, $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow{(n)} \cos(1)$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) \stackrel{(n)}{=} \cos(1)$ olur.

Alıştırmalar 1.11. Aşağıda çeşitli reel (gerçel) fonksiyon dizileri verilmiştir. Her biri için önce uygun bir m doğal sayısı ve $\mathbb{I}$ kümesi oluşturunuz sonra da noktasal yakınsamalarını araştırınız.

$$\left(\frac{\sin x}{n}\right), (nx^2), (x^n), \left(\frac{n}{x+n}\right), \left(\frac{nx}{n+x}\right), \left(\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right), \left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right), (xe^{-n}), \left(\frac{e^x}{n}\right),$$

$$\left(\frac{\cos x}{n+1}\right), \left(\frac{\sin x}{n}\right), \left(\frac{x}{n^2}\right), \left(\frac{x}{n^2+4}\right), \left(\frac{1}{n^2+x^2}\right), \left(\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\right), (e^{-nx}), \left(\frac{n}{e^{nx}}\right).$$

Noktasal yakınsamada önemli bir problem kendini bazen (verilen fonksiyon dizisinin noktasal yakınsamasını araştırırken) göstermektedir. Bazen verilen bir fonksiyon dizisi ilgili $\mathbb{I}$ kümesinde her bir n doğal sayısı için sürekli iken, noktasal olarak yakınsadığı fonksiyon ise $\mathbb{I}$ kümesinde sürekli olmayabilir. Demek ki “sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limiti olan fonksiyon sürekli olmak zorunda değil” oluşudur. Bu durum için, $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $n \geq 0$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyon dizisi için açıktır:

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{(n)} f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & , \text{ eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Dizilerde bilmiş olduğumuz bazı temel önermeler elbette ki fonksiyon dizileri için de geçerli olacaktır. Aşağıda bazıları ispatsız verilmiştir.

Teorem 1.4. Hehangi bir $\mathbb{I}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanan $(f_n(x))_m$ ve $(g_n(x))_m$ fonksiyon dizileri sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsasın ve α ile β skalarları verilsin. Bu durumda aşağıdaki önermeler daima doğrudur.

(i) $\alpha(f_n(x)) = (\alpha f_n(x))$ fonksiyon dizisi de $\alpha f(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar.

(ii) $\alpha(f_n(x)) + \beta(g_n(x)) = (\alpha f_n(x) + \beta g_n(x))$ fonksiyon dizisi de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar.

(iii) $(f_n(x))(g_n(x)) = (f_n(x)g_n(x))$ fonksiyon dizisi de $f(x)g(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar.

(iv) $(1/f_n(x))$ fonksiyon dizisi de $1/f(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. (Tabii ki her $x \in \mathbb{I}$ ve her $n \in \mathbb{N}_m$ için $f_n(x) \neq 0$ ve $f(x) \neq 0$.)

(v) $(f_n(x)/g_n(x))$ fonksiyon dizisi de $f(x)/g(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. (Tabii ki her $x \in \mathbb{I}$ ve her $n \in \mathbb{N}_m$ için $g_n(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$.)

Noktasal yakınsamada ilgili $f(x)$ fonksiyonunun verilen aralıkta sürekli olmadığını belirtmiştik. Böylesi problemten dolayı, fonksiyon dizilerinin uygulaması açısından bekirtilen problem oldukça sıkıntılı bir durumdur. Şimdi uygulama boyutundaki bu problemi halletmek için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 1.12. $\mathbb{I}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlı bir $(f_n(x))_m$ fonksiyon dizisi noktasal yakınsayan, yani $f_n(x)$ dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsayan bir dizi olsun. Bir $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir N doğal sayısı var ve bunu geçen her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{I}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ oluyorsa, $(f_n(x))_m$ fonksiyon dizisine, yani $f_n(x)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir ve bu durum genellikle

$$f_n(x) \xrightarrow{(d)} f(x) \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken}) \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{(d)}{=} f(x)$$

şeklinde gösterilir.

Üstteki tanımda aranan N doğal sayısı aynen dizi tanımında da belirtildiği üzere verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısına göre değişecek (belirlenecek) bir sayı olduğundan dolayı, ilgili sayı çoğu kez $N = N(\epsilon)$ şeklinde de ifade edilir. Arıca, yine dizi kavramında özellikle vurguladığımız gibi $\epsilon > 0$ sayısının keyfi oluşu istenilen kadar küçük olmasıyla önem arz etmektedir.

Özellikle Tanım 1.1 ile Tanım 1.2 karşılaştırıldığında, Tanım 1.12'nin oldukça güçlü bir tanım olduğu kolayca görülür. Çünkü, noktasal yakınsamada ilgili limit x 'e bağımlı olarak değişebilmekte ama düzgün yakınsamada ise ilgili limit x 'den bağımsız haldedir. Bu durum iki yakınsama açısından önemli bir ayrımdır.

Ayrıca, aşağıda verilen teoremin ispatına da gerek duyulmamıştır. Çünkü, eğer bir N doğal sayısı her $x \in \mathbb{I}$ için yeterli ise elbette ki her $x \in \mathbb{I}$ için o N doğal sayısı da yeterli olur.

Teorem 1.5. Eğer $(f_n(x))_m$ fonksiyon dizisinin bir $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor ise $f(x)$ 'e noktasal da yakınsar.

Uyarı 1.4. Teorem 1.3'ün karşıtı doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 1.15.

a) $\mathbb{I} = [-\pi/2, \pi/2]$ ve $(f_n(x)) = \left(\frac{\sin x}{n}\right)_1$ olsun . Verilen dizisinin $\mathbb{I}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine bir fonksiyon belirlediği de açıktır. Her bir $x \in \mathbb{I}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{(n)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{n} \stackrel{(n)}{=} 0$$

olup, ilgili fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığı fonksiyon $f(x) = 0$ gerçel değerli fonksiyondur. Şimdi bu yakınsamanın düzgün olup olmadığına bakalım. Bunun için de, her $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısını bulmalıyız ki her $n \geq N = N(\epsilon)$ doğal sayısı ve her $x \in \mathbb{I} = [-\pi, \pi]$ için $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| < \epsilon$ olsun.

$\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman, her $[-\pi/2, \pi/2]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin x}{n}\right| = \frac{|\sin x|}{|n|} = \frac{|\sin x|}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

olur, eğer $N = N(\epsilon) > 1/\epsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısını seçilirse her $n \geq N$ için ilgili eşitsizlik, yani $\left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| < \epsilon$ eşitsizliği daima doğru olur. O halde, ilgili yakınsama düzgün olur.

b) $\mathbb{I} = [1, 2]$ ve $(f_n(x)) = \left(\frac{nx}{nx+1}\right)_1$ olsun. Her bir $x \in \mathbb{I}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1} \stackrel{(n)}{=} 1$$

olup, ilgili fonksiyon dizisinin $f(x) = 1$ noktasal yakınsadığı açıkça görülür. Peki, bu yakınsama düzgün müdür? Araştıralım. Bunun için de her $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısını bulmalıyız ki her $n \geq N = N(\epsilon)$ doğal sayısı ve her $x \in \mathbb{I} = [-\pi, \pi]$ için $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| < \epsilon$ olsun.

$\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman, her $x \in [1, 2]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{nx+1}\right| = \frac{|-1|}{|nx+1|} = \frac{1}{nx+1} \cdots (*)$$

olup ve bunun için x 'den bağımsız bir üst sınır belirlemek durumundayız. Şimdi buna bakalım. Bunun için

$$g_n(x) = \frac{1}{nx+1} \Rightarrow \frac{d}{dz}(g_n(x)) = -\frac{n}{(nx+1)^2}$$

elde ederiz ki her $x \in [1, 2]$ için $\frac{d}{dz}(g_n(x)) < 0$ olduğu açıktır. Bu da Analiz derslerinden bildiğimiz gibi $g_n(x)$ fonksiyonu $[1, 2]$ kümesinde azalan bir fonksiyon demektir. O halde, *'dan kolayca

$$\left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{nx+1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

olur, eğer $N = N(\epsilon) > 1 - 1/\epsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısını seçilirse her $n \geq N$ için ilgili eşitsizlik, yani $\left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| < \epsilon$ eşitsizliği daima doğru olur. O halde, ilgili yakınsama düzgün olur.

c) $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $(f_n(x)) = \left(\frac{nx}{nx+1}\right)_1$ olsun. O zaman, her $x \in [0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{nx+1} \stackrel{(n)}{=} 1$$

olmasına rağmen, yakınsamanın düzgün olmadığını sizlerin araştırmasına bırakıyoruz.

Alıştırmalar 1.12. Aşağıda çeşitli reel (gerçel) değerli fonksiyonlar bir de $\mathbb{I}$ kümesi verilmiştir. Buna göre ilgili dizilerin düzgün yakınsaklıklarını araştırınız.

$$\left(\frac{\cos(x)}{n}\right)_1, \mathbb{I} = [-\pi, \pi]; \left(x^2/n^2\right)_1, \mathbb{I} = [-1, 1]; (1-x^n)_1, \mathbb{I} = [0, 1]; \left(\frac{n}{x+n}\right)_0, \mathbb{I} = [0, 2];$$

$$\left(\frac{\sin(nx)}{n-x}\right)_2, \mathbb{I} = [-1, 1]; \left(\frac{\ln x}{n}\right)_1, \mathbb{I} = [1, e]; \left(x - \frac{1}{n}\right)_1, \mathbb{I} = [-2, 2]; \left(\frac{nx}{nx+1}\right)_0, \mathbb{I} = [1, 2].$$

Bazı durumlarda düzgün yakınsaklık araştırmasında bazı sıkıntılarla karşılaşabiliriz. Bu nedenle, en küçük üst sınır tanımını göz önüne alırsa, her $x \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \kappa_n = \sup_{x \in \mathcal{A}} |f_n(x) - f(x)|$$

olduğundan, Tanım 1.2.5 tanımına denk olan bazı durumlarda daha kullanışlı olabilen şu tanımı da kolayca oluşturabiliriz.

Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{A}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise, $(f_n(x))_{n_0}$ fonksiyon dizisine $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Şimdi fonksiyon dizileri ile ilgili olan önemli bazı teoremleri verelim.

Fonksiyon dizilerinin önemli bazı sonuçları vardır. Şimdi bunları ele alalım.

Teorem 1.6. Herbir $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı için $f_n(x)$ sürekli fonksiyonlarının oluşturduğu $(f_n(x))$ fonksiyon dizisi bir $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $f(x)$ gibi bir fonksiyona düzgün yakınsasın. O zaman, $f(x)$ fonksiyonu da $\mathcal{A}$ kümesinde süreklidir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]$$

dır.

İspat. Bir $x_0 \in \mathcal{A}$ sabit noktası olsun. O zaman, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olduğunu göstermek zorundayız. $f_n(x) \xrightarrow{(d)} f(x)$ olduğundan $\epsilon_1 > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}(\epsilon_1)$ doğal sayısı vardır ve $n \geq N \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_1$ dir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için $f_n(x)$ fonksiyonları sürekli olduğundan dolayı, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki $x_0 \in \mathcal{A}$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon_2$ dir.

Bu durumda, $x_0 \in \mathcal{A}$ ve $|x - x_0| < \delta$ için,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x)| < \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Herbir ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) sayıları keyfi olduğundan hepsini $\epsilon/3$ olarak seçilebilir ve dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu x_0 'da sürekli olur. $x_0 \in \mathcal{A}$ sayısının seçimi keyfi olduğundan dolayı $f(x)$ fonksiyonunun $\mathcal{A}$ da sürekli olur.

Teorem 1.7. Herbir $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı için $f_n(x)$ fonksiyonları ve $f(x)$ fonksiyonu bir $[a, b]$ kümesi üzerinde integrallenebilir olsun ve $(f_n(x))_{n_0}$ fonksiyon dizisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. O zaman,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

olur.

İspat. Herbir $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ doğal sayısı için $f_n(x)$ fonksiyonları ile $f(x)$ fonksiyonu bir $[a, b]$ kümesi üzerinde integrallenebilir ve $f_n(x) \xrightarrow{(d)} f(x)$ olsunlar. O zaman, Tanım 1.2.?'den, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde, öyle bir $N \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı var ve her $n \geq N$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

olmak durumundadır. Buna göre,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \epsilon dx = \epsilon(a - b) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $\epsilon > 0$ keyfisi sayısı için geçerli olduğundan dolayı, yani $\epsilon \rightarrow 0$ için

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir.

Teorem 1.8. Herbir $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ doğal sayısı için $f_n(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ kümesi üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar ve $g(x)$ fonksiyonu da yine $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsunlar. Ayrıca, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ yakınsaması noktasal ve $f'_n(x) \rightarrow g(x)$ yakınsaması da düzgün olsun. O zaman,

$$f'(x) = g(x) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} (f_n(x)) \right]$$

dir.

İspat. $[a, b]$ kümesi üzerinde $f_n(x) \rightarrow g(x)$ yakınsaması düzgün olduğundan $g(x)$ fonksiyonu, Teorem 1.7 gereği $[a, b]$ kümesi üzerinde süreklidir. Dolayısıyla integrallenebilir. Ayrıca, Teorem 1.8 gereğince de, her bir $x \in [a, b]$ için,

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a)$$

dır. Burada, kolayca, $f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$ yazılabilir ve sonuç olarak $f'(x) = g(x)$ elde edilir.

İlgili teoremler için bir uygulama yapalım.

Örnek 1.16. Fonksiyon dizimiz $(f_n(x)) = (\frac{x}{n^2+x^2})_{n=1}$ ve $I = [0, 1]$ olsun. $(\frac{x}{n^2+x^2})_1 \xrightarrow{(n)} 0$ olduğu açıktır. Şimdi, bu yakınsamanın düzgün olup olmadığını araştıralım. Bunun için, her $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}$ bulmalıyız ki her $n \geq N \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0, 1]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ olsun. O zaman,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n^2+x^2} - 0 \right| = \left| \frac{x}{n^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} < \epsilon$$

ilişkisinden, her keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için $\lceil \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} \rceil + 1 = N(\epsilon) = N < n$ şeklinde olan ve ilgili eşitsizliği garantileyen daima bir $N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. (Acaba $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ fonksiyonunun $I = [0, 1]$ aralığında bir ekstremumu var mıdır? Gerekli araştırmayı yapınız.) O halde, $(\frac{x}{n^2+x^2})_1 \xrightarrow{(d)} 0$ olur. Bu koşul altında ilgili teorem sağlanmak zorundadır. (Sağlanmasa ne olur?) Bakalım.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x}{n^2+x^2}dx = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n^2 + x^2) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

elde edilir ki, istenen hemen görülür. Sizlerde diğer iki teorem için gerçekleyiniz. Ayrıca, bütün bu araştırmaları, Örnek 1.2.6'da verilen düzgün yakınsak olan fonksiyon dizileri için de uygulayınız.

Alıştırmalar 1.13.

(i) Aşağıda verilenlerin sonuçlarını gerekli integralleri alarak bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^2} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx \quad , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + n^2} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + n^2} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + n^2} dx \quad , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \left(x - \frac{x}{n}\right) dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x}{n}\right) dx \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 e^{-nx} dx \quad , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x e^{-nx} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x e^{-nx} dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 x e^{-nx} dx . \end{aligned}$$

(ii) Aşağıda verilenler eşitlikler daima doğru olur mu? Neden? Gerekli araştırmaları yapınız.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{n+x}{n^2+x} dx &= \int_0^{\pi} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n^2+x} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n+x}{n^2+x^2} dx &= \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n^2+x^2} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 e^{\frac{x}{n}} dx &= \int_1^2 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{x}{n}} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x e^{-\frac{x}{n}} dx &= \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x e^{-\frac{x}{n}} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^2} dx &= \int_0^{\infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+(nx)^2} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{n^2+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+x^2} \right) \right] dx , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^0 \left(x + \frac{x}{n} \right)^2 dx &= \int_{-1}^0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x}{n} \right)^2 \right] dx . \end{aligned}$$