100/100

Çözüm

07 / 12 / 2016

MAT 301 / Kompleks Analiz - III. KSS

(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza :

Soru: $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : (|z| - 4)^2 = 1\}$ kümesini önce kompleks düzlemde çiziniz. Ayrıca, bu kümenin $\mathbb{C}$'de kompakt, bağlantılı ve yol bağlantılı bir küme olup olmadığını araştırınız. (100 p.)

Çözüm: Önce ilgili kümeyi z-düzleminde çizelim.

$$z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (|z|^2 - 4)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(|z|^2-4)^2} = \sqrt{1}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - 4 = \pm 1$$

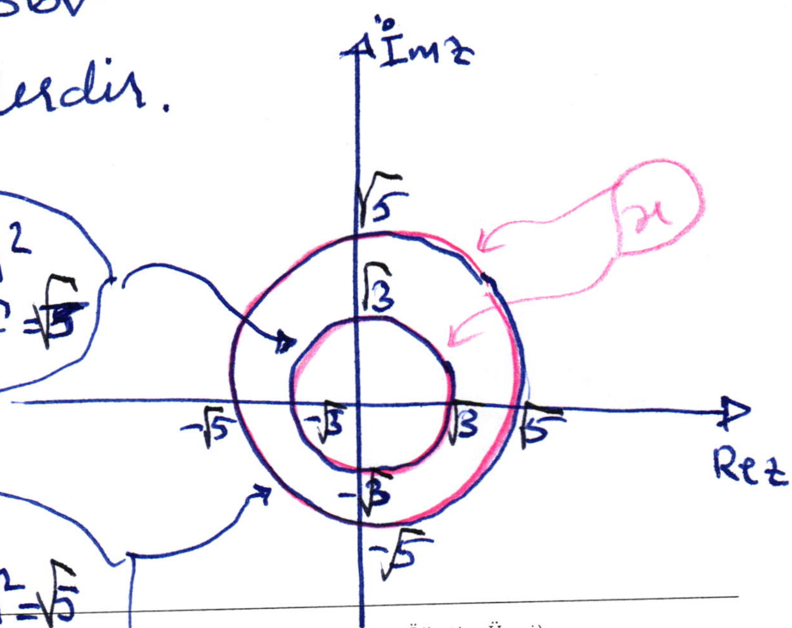
$$\Leftrightarrow |z|^2 = 4 \pm 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 5 \text{ ve } |z|^2 = 3$$

$$|z|^2 = |x+iy|^2 = \sqrt{(x^2+y^2)}^2 = x^2+y^2 = 3$$

olup, bunlarda orjin merkezli ve $\sqrt{5}$ br ile $\sqrt{3}$ br yarıçaplı çemberlerdir.

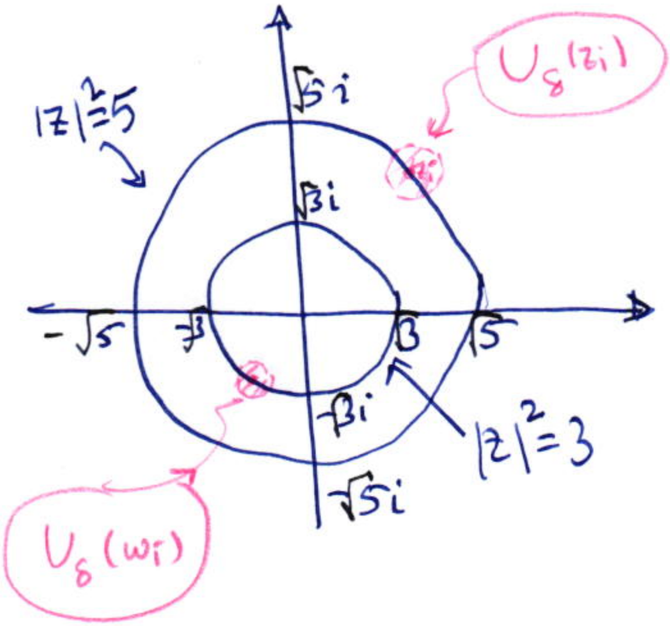
$$|z|^2 = |x+iy|^2 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3}$$



$$|z|^2 = |x+iy|^2 = \sqrt{5}$$

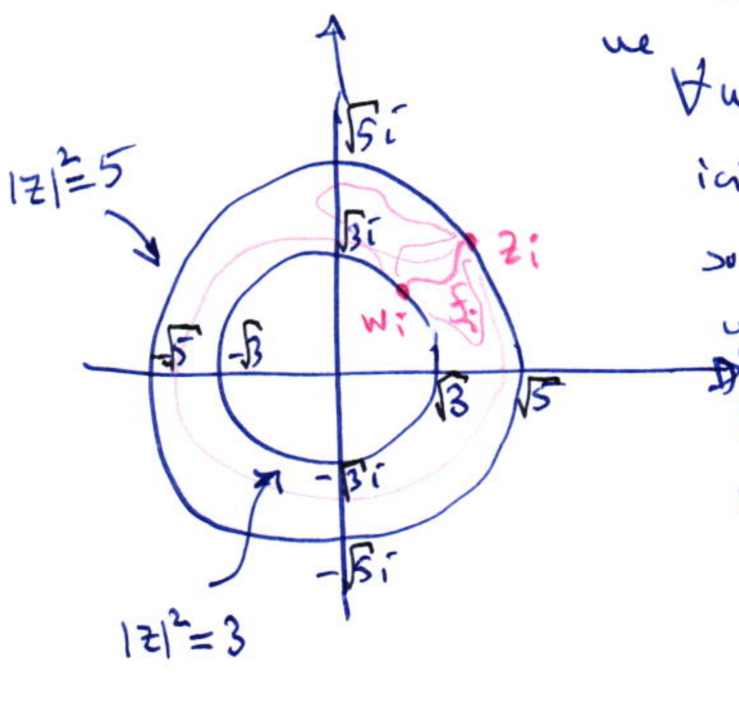
Şimdi diğer isterenleri araştıralım.

$\mathcal{H}$ açık mı? Kapalı mı?



$\forall z_i \in \mathcal{H}$ için $U_\delta(z_i) \subset \mathcal{H}$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunamaz. Dolayısıyla, $\mathcal{H}$ bir açık küme değildir.

O halde, $\mathcal{H} = G \cup F$ olacak şekilde (ayrık ve) açık olan G ve F kümeleri yoktur / bulunamaz. Bu ise, $\mathcal{H}$'nin bir bağlantılı küme olması demektir.



$\forall z_i \in \{z\in\mathbb{C} : |z|^2=5\}$

ve $\forall w_i \in \{z\in\mathbb{C} : |z|^2=3\}$

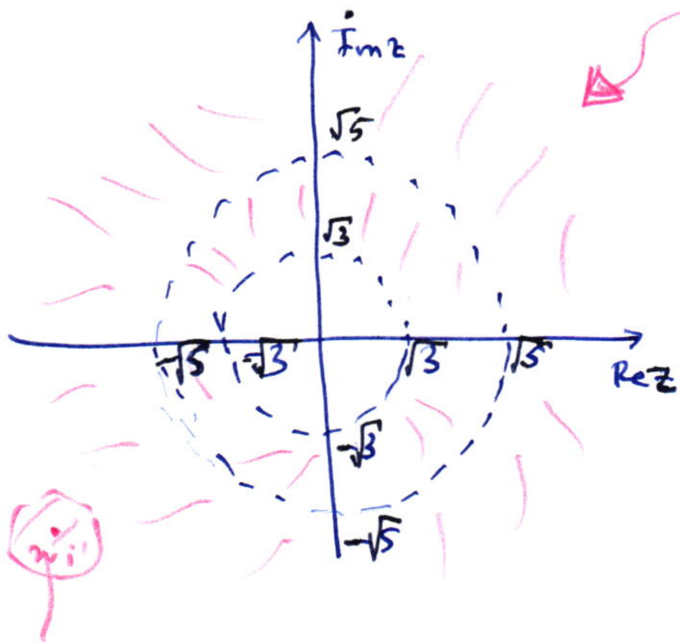
için, z_i'yi w_i'ye bağlayan sonsuz tane f_i sürekli fonksiyonu vardır ama bunların hiçbiri $\mathcal{H}$ kümesinde bulunmaz.

$\therefore \mathcal{H}$, yol bağlantılı değildir.

$\forall z \in \mathcal{H}$ için $|z| \le M = \sqrt{5}$ olup, $\mathcal{H}$ nın sınırlı olduğu açıktır. ($|z|^2 = 3 \Rightarrow |z| = \sqrt{3}$ ve $|z|^2 = 5 \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$)

Acaba $\mathcal{H}$ kapalı mıdır? Bunun için de $\mathcal{H}^c$ nin açık olduğu görmek durumundayız.

$\mathcal{H}^c = \mathbb{C} - \mathcal{H}$ olup $\mathcal{H}^c$ yandaki gibidir.



$\forall w_i \in \mathcal{H}^c$ için $\ni \exists \delta > 0 \ni U_\delta(w_i) \subset \mathcal{H}^c$ dir.

O halde; $\mathcal{H}^c$, $\mathbb{C}$'de açıktır. Bu ise, $\mathcal{H}$'nin $\mathbb{C}$'de kapalı olması demektir.

$\therefore$ $\mathcal{H}$ hem sınırlı hem de kapalıdır. Bu ise $\mathcal{H}$'nin KOMPAKT (tıkız) olması demektir.