$\frac{100}{100}$

ÇÖZÜMLER

14 / 03 / 2017

MAT 403 - Kompleks Fonksiyonlar Teorisi I / II. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza :

Soru: [100 p.] $f(z) = \frac{z}{z-i}$ kompleks fonksiyonu için aşağıdakilerden birini seçiniz ve isteneni yapınız.

a) $z_0 = 2i$ noktasındaki limitinin 2 olduğunu gösteriniz.

b) $z_0 = 2i$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

c) $z_0 = 2i$ noktasındaki türevinin i olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

a:) Yani $\lim_{z\to 2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{z-i} = 2$ olduğunu ε-δ ilişkisiyle gösterilmesi istenmektedir. Bunun için de, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon; 2i) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyle ki $|z-2i| < \delta$ koşulunu sağlayan her $z \in D_f$ için $\left|\frac{z}{z-i} - 2\right| < \varepsilon$ olsun.

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$\left|\frac{z}{z-i} - 2\right| = \left|\frac{z-2(z-i)}{z-i}\right| = \left|\frac{-z+2i}{z-i}\right| = \left|\frac{-(z-2i)}{z-i}\right|$$

$$= \frac{|z-2i|}{|z-i|} < \frac{\delta}{|z-i|} \quad \ldots\ldots (1)$$

olup $\frac{1}{|z-i|}$ için bir üstsınır belirlemek durumundayız. Bunun için de, ters-üçgen eşitsizliğinin kullanılması gerekir.

$$|z-i| = |z-i-i+i| = |z-2i+i| \geq \big||i| - |z-2i|\big|$$

$$= \big|1 - |z-2i|\big| \quad (|z-2i| < \delta < 1)$$

$$= 1 - |z-2i|$$

ve $|z-2i|<\delta<1 \Leftrightarrow -1<-\delta<-|z-2i|$

$\Leftrightarrow 0<1-\delta<1-|z-2i|$

$\Leftrightarrow 1/(1-|z-2i|) < 1/(1-\delta)$ (*) ☺

eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa, nerede (1)'deki eşitsizlikte:

$$\left|\frac{z}{z-i}-2\right| = \cdots < \frac{\delta}{|z-i|}$$

$$< \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$ olur, eğer

$$\delta=\delta(2i;\varepsilon)=\min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$ $(\varepsilon>0)$ seçilirse.

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$ keyfi sayısı için daima bir $\delta>0$ sayısı vardır/bulunabilir $\ni$

$$\forall z\in\left\{z\in\mathbb{C} : |z-2i|<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$$

için daima

$$\left|\frac{z}{z-i}-2\right| < \varepsilon$$ doğru olur.

$\varepsilon>0$ sayısı keyfi olduğundan

$$\left|\frac{z}{z-i}-2\right|<\varepsilon\to 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to 2i}\frac{z}{z-i}=2$$

olur.

☺

Diğerleri ödev.

Yolgösterme b:)

$f(z)=\frac{z}{z-i}$ k. fonksiyonu $z_0=2i$ noktasında süreklidir

$\Longleftrightarrow$ [$\forall\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır $\ni$ $|z-2i|<\delta$ koşulunu sağlayan her $z\in D_f$ için $|f(z)-f(2i)|=\left|\frac{z}{z-i}-2\right|<\varepsilon$ dır.]

olduğu için $\forall\varepsilon>0$ keyfi sayısı için (a)-da izlenen yolun burada da izlenmesi gerekmektedir. Yani, $\forall\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde $\ni$ $\exists\,\delta>0$ sayısı bulmalıyız ki

$\forall z\in\{z\in\mathbb{C}:\ |z-2i|<\delta\}$ için

$$\left|\frac{z}{z-i}-2i\right|<\varepsilon \text{ olsun.}$$

(Ellerinizden öper 😢)

Yol Gösterme c:) (a) ve (b) yapılan / istenen şey bu sefer-de $F(z)=\frac{f(z)-f(2i)}{z-i}=\frac{\frac{z}{z-i}-2}{z-i}=\ldots$ fonksiyonu için göz önüne alınarak, $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\ni\exists\,\delta>0$ sayısı bulunmalıdır ki $\ni$ $\forall z\in\{z\in\mathbb{C}:\ |z-2i|<\delta\}$ için

$$\left|\frac{\frac{z}{z-i}-2}{z-i}-i\right|<\varepsilon \text{ olsun.}$$

(Ellerinizden yine öper. 😢)