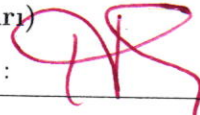


100
100

Cözüm

14 / 03 / 2017

MAT 403 - Kompleks Fonksiyonlar Teorisi I / II. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza : 

Soru: [100 p.] $f(z) = \frac{z}{z-i}$ kompleks fonksiyonu için aşağıdakilerden birini seçiniz ve isteneni yapınız.

- a) $z_0 = 2i$ noktasındaki limitinin 2 olduğunu gösteriniz.
b) $z_0 = 2i$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.
c) $z_0 = 2i$ noktasındaki türevinin i olduğunu gösteriniz.

Cözüm:

a) Yani $\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{z-i} = 2$ olduğunu ϵ - δ ilişkisiyle gösterilmesi istenmektedir. Bunun için de, $\forall \epsilon > 0$ sayını verdiğimizde öyle bir $\delta = \delta(\epsilon; 2i) > 0$ sayısını bulmalıyız ki öyle ki $|z - 2i| < \delta$ koşulunu sağlayan her $z \in D_f$ için $\left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| < \epsilon$ olsun.

Kayfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| &= \left| \frac{z - 2(z-i)}{z-i} \right| = \left| \frac{-z + 2i}{z-i} \right| = \left| \frac{-(z-2i)}{z-i} \right| \\ &= \frac{|z-2i|}{|z-i|} < \frac{\delta}{|z-i|} \quad (1) \end{aligned}$$

olup $\frac{1}{|z-i|}$ için bir üst sınır belirlemek durumundayız. Bunun için de, ters-üçgen eşitsizliğinin kullanılması gerekir.

$$\begin{aligned} |z-i| &= |z - i - i + i| = |z - 2i + i| \geq |i| - |z - 2i| \\ &= |1 - |z - 2i|| \quad (|z - 2i| < \delta < 1) \\ &= 1 - |z - 2i| \end{aligned}$$

$$\vee \epsilon \quad |z - z_0| < \delta < 1 \Leftrightarrow -1 < -\delta < -|z - z_0|$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \delta < 1 - |z - z_0|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - |z - z_0|} < \frac{1}{1 - \delta} \quad (*) \text{ 😊}$$

esitsizlikleri birlikte kullanılırsa, nerede (1)'deki eşitsizlikte:

$$\left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| = \dots < \frac{\delta}{|z-i|}$$

$$< \frac{\delta}{1-\delta} < \epsilon \text{ olur, eğer}$$

$$\delta = \delta(z_0; \epsilon) = \min \left\{ \epsilon, \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right\} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \quad (\epsilon > 0) \text{ seçilirse.}$$

$\therefore \forall \epsilon > 0$ keyfi sayısı için daima bir $\delta > 0$ sayısı vardır/bulunabilir \exists

$$\forall \epsilon \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \right\}$$

için daima

$$\left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| < \epsilon \text{ değeri olur.}$$

$\epsilon > 0$ sayının keyfi olduğundan

$$\left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| < \epsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{z-i} = 2$$

Olur.



Diğerleri ödev.

Yol gösterme b)

$f(z) = \frac{z}{z-i}$ k. fonksiyonu $z_0 = 2i$ noktasında süreklidir

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \text{ sayısı verildiğinde öyle bir } \delta > 0 \text{ sayısı} \\ \text{kader } \exists |z - 2i| < \delta \text{ koşulunu sağlayan her } z \in D_f \\ \text{için } |f(z) - f(2i)| = \left| \frac{z}{z-i} - 2 \right| < \varepsilon \text{ dir.} \end{array} \right]$$

Olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ keyfi sayısı için (a)-da istenen yolun burada da izlenmesi gerekmektedir. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\exists \exists \delta > 0$ sayısı bulmalıyız ki

$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| > \delta\}$ için

$$\left| \frac{z}{z-i} - 2i \right| < \varepsilon \text{ olsun.}$$

(Ellerimizden öper 😞)

Yol gösterme c)

(a) ve (b) yapılan/istenen şey bu seferde $f(z) = \frac{f(z) - f(2i)}{z - 2i} = \frac{\frac{z}{z-i} - 2}{z-i} = \dots$ fonksiyonu için

göz önüne alınarak, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \exists \delta > 0$ sayısı bulunmalıdır ki $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| > \delta\}$ için

$$\left| \frac{\frac{z}{z-i} - 2}{z-i} - i \right| < \varepsilon \text{ olsun.}$$

(Ellerimizden yine öper. 😞)