

100 / 100 AA

KISIMEN ÇÖZÜM

28 / 12 / 2016

MAT 301 - Kompleks Analiz / VI. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı: Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza: AA

Soru: Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve isteneni gerçekleştiriniz. (100 p.)

- a) $f(z) = iz^2$ kompleks fonksiyonu (dönüşümü) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\}$ kümesini nereye dönüştürür. Belirleyiniz ve her iki kümeyi de ilgili uzaylarda çiziniz.
- b) $f(z) = \frac{i}{z}$ kompleks fonksiyonu (dönüşümü) hangi kümeyi $\{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}\}$ kümesine dönüştürür. Belirleyiniz ve her iki de ilgili uzaylarda çiziniz.
- c) $f(z) = z^2 - iz$ kompleks fonksiyonu (dönüşümü) hangi kümeyi $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$ kümesine dönüştürür. Belirleyiniz ve her iki kümeyi de ilgili uzaylarda çiziniz.
- d) $f(z) = \frac{1}{z}$ kompleks fonksiyonu (dönüşümü) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 1\}$ kümesini hangi kümeye dönüştürür. Belirleyiniz ve her iki kümeyi de ilgili uzaylarda çiziniz.

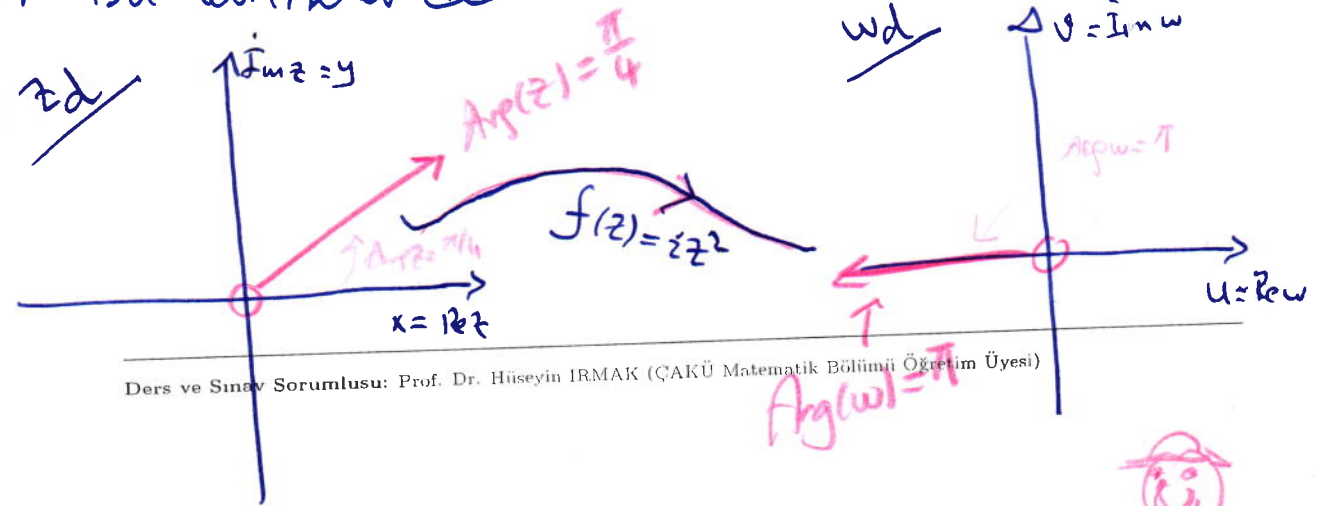
Çözüm: a)

$$\begin{aligned} w = f(z) = iz^2 &\Leftrightarrow \text{Arg}(w) = \text{Arg}(f(z)) = \text{Arg}(iz^2) \\ &\Leftrightarrow \text{Arg}(w) = \text{Arg}(i) + \text{Arg}(z^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2\text{Arg}(z) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Olup,

$$w = f(z) = iz^2 : \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\} \xrightarrow{A} \{w \in \mathbb{C} : \text{Arg}(w) = \pi\}$$

olur. Bu lütmeler de:



Ders ve Sınav Sorumlusu: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK (ÇAKÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi)

1



Gözüm di) $w = f(z) = \frac{1}{z}$ olup ve $w = u + iv$ şeklinde
 genel kabulümüz doğrultusunda;

$$w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{w}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{w}}{w \cdot \bar{w}}\right) \\ = \operatorname{Im}\left(\frac{u - iv}{|w|^2}\right) \\ = -\frac{v}{|w|^2} = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

olup ve her eşitlik sonucu, yani

$$1 = -\frac{v}{u^2 + v^2} \Leftrightarrow u^2 + v^2 = -v \Leftrightarrow u^2 + v^2 + v = 0 \quad (u^2 + v^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 + v + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

şeklindeki w -düzleminde $(0, -\frac{1}{2})$ merkezli ve $r = \frac{1}{2}$ br yarıçaplı çember elde edilir. O halde,

$$w = f(z) = \frac{1}{z} : \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 1\} \rightarrow \mathcal{B} = \{w \in \mathbb{C} : u^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2, w = u + iv\}$$

ilişkisi görülür. Bu kümeler de,

