$\frac{100}{100}$ — KISMEN ÇÖZÜMLERİ

07 / 01 / 2016

MAT 301 - Kompleks Analiz / Final Soruları

(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

! **AŞAĞIDAKİ TALİMATLARA UYARAK GEREKENLERİ YAPINIZ**

Soru 1) Aşağıda verilenlerden sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız. (20p.)

(a) $\mathcal{H}=\left\{z\in\mathbb{C}: Arg\left(\frac{z}{i}\right)=\pi\right\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme açık mıdır? Kapalı mıdır? Tıkız mıdır? Neden?

(b) $\mathcal{I}=\left\{z\in\mathbb{C}: \Im m\left(\frac{i}{z}\right)=0\right\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu küme, bağlantılı mıdır? Yol bağlantılı mıdır? Bölge midir? Neden?

(c) $\mathcal{H}=\left\{z\in\mathbb{C}: \left(|z-i|-4\right)^2=1\right\}$ kümesini ilgili uzayda çiziniz. Bu kümenin iç, yığılma ve sınır noktalarının oluşturduğu kümeleri bulunuz.

Soru 2) Aşağıda verilenlerden sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız. (20p.)

(a) $f(z)=\frac{z-iz^2}{2z-3i}$ kompleks fonksiyonunun $z_0=-i$ noktasındaki limitini belirleyiniz ve doğruluğunu $\epsilon-\delta$ ilişkisiyle ispatlayınız.

(b) $f(z)=\frac{3z+2i}{z^2+1}$ kompleks fonksiyonunun $z_0=i$ noktasında sürekli oldğruluğunu $\epsilon-delta$ ilişkisiyle ispatlayınız.

(c) $f(z)=\frac{z}{z-2i}$ kompleks fonksiyonunun $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ kümesinde düzgün sürekli oldğunuğunu ispatlayınız.

Soru 3) Aşağıda verilenlerden sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız. (20p.)

(a) $f(z)=\frac{1-i}{z^2}$ kompleks fonksiyonu $\mathcal{H}=\left\{z\in\mathbb{C}: |Arg(z)|<\frac{\pi}{4}\right\}$ kümesini nereye dönüştürür? Belirleyiniz ve ilgili uzayda çiziniz.

(b) $f(z)=e^{iz^2}$ kompleks fonksiyonu hangi kümeyi $\mathcal{I}=\left\{z\in\mathbb{C}: |z|=e^2\right\}$ kümesine dönüştürür? Belirleyiniz ve ilgili uzayda çiziniz.

(c) $f(z)=\frac{z}{z-i}$ kompleks fonksiyonu $\mathcal{H}=\left\{z\in\mathbb{C}: \Im m(iz)=1\right\}$ kümesini nereye dönüştürür? Belirleyiniz ve ilgili uzayda çiziniz.

(ç) $f(z)=\frac{z}{z+i}$ kompleks fonksiyonu hangi kümeyi $\mathcal{I}=\left\{z\in\mathbb{C}: |w|<1\right\}$ kümesine dönüştürür? Belirleyiniz ve ilgili uzayda çiziniz.

Soru 4) Aşağıda verilenlerden sadece ***birini seçiniz*** ve isteneni yapınız. (20p.)

(a) $z_n=\frac{n-i}{ni+1}$ genel terimli kompleks sayı dizisinin önce limitini berlirleyiniz ardından da doğruluğunu $N-\epsilon$ ilişkisiyle görünüz.

(b) $\left(z_n\right)_{n_0}$ kompleks sayı dizisi Cauchy dizisidir *ancak ve ancak* $\left(z_n\right)_{n_0}$ kompleks sayı dizisi yakınsaktır. İspatlayınız.

(c) Bir $\left(z_n\right)_{n_0}$ kompleks sayı dizisi sınırlı ise yakınsak olur mu? Neden?

(ç) Bir $\left(z_n\right)_{n_0}$ ve $\left(w_n\right)_{n_0}$ kompleks sayı dizileri ıraksak ise $\left(z_n\cdot w_n\right)_{n_0}$ kompleks sayı dizisi de ıraksak olur mu? Neden?

Başarılar . . .

Ders ve Sınav Sorumlusu: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK (ÇAKÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi)

Çözüm 1/a)

! Argument olayı söz konusu olduğuna göre $z \neq 0$ olması gerektiğini (zorunlu) biliyoruz.

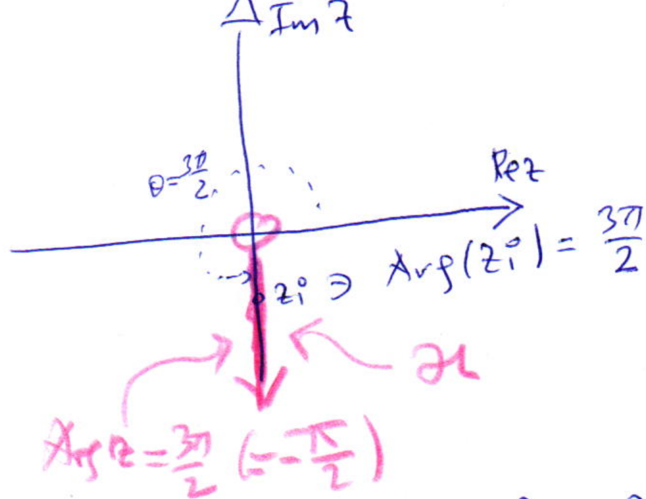
$$z \in \mathcal{H} \Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{i}\right) = \pi$$

$$\Leftrightarrow Arg\, z - Arg\, i = \pi$$

$$\Leftrightarrow Arg\, z - \frac{\pi}{2} = \pi$$

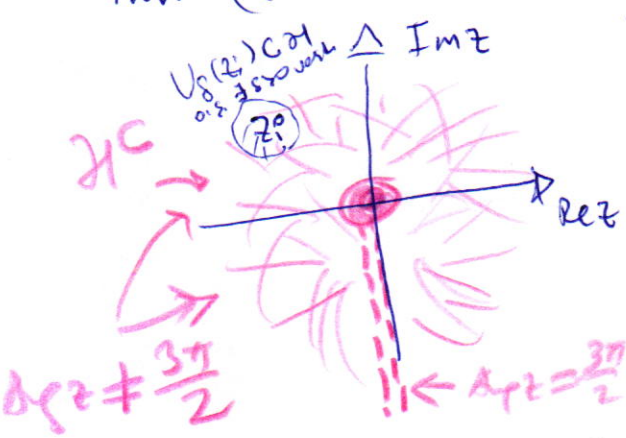
$$\Leftrightarrow Arg\, z = \frac{3\pi}{2}$$

$$\left(\theta = Arg\, z = \frac{3\pi}{2}\right)$$



* $\forall z_i \in \mathcal{H}$ olmak üzere, $U_\delta(z_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_i| < \delta\} \subset \mathcal{H}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Diğer bir ifade ile $\forall z_i \in \mathcal{H}$ ~~ve~~ $\forall \delta > 0$ için $U_\delta(z_i) \not\subset \mathcal{H}$ dır. Bu ise, $\forall z_i \in \mathcal{H}$ noktası $\mathcal{H}$ için bir İÇ NOKTA değildir. Yani, $\mathring{\mathcal{H}} = \emptyset$ dır. Bu ise $\mathcal{H}$ nin $\mathbb{C}$'de AÇIK KÜME OLMAMASI demektir. $\therefore$ $\mathcal{H}$, $\mathbb{C}$'de açık değildir.

** Peki, $\mathcal{H}$ ($\mathbb{C}$'de) kapalı mıdır? Bunun için de $\mathcal{H}^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{H}$ nin ($\mathbb{C}$'de) açık olması gerekir. Bakalım:



$\forall z_i \in \mathcal{H}^c$ için daima $\ni \exists\, \delta > 0$ sayısı vardır $\ni U_\delta(z_i) \subset \mathcal{H}^c$ dır. $\therefore$ $\mathcal{H}^c$, $\mathbb{C}$'de açıktır. $\Rightarrow \mathcal{H}$, $\mathbb{C}$'de kapalıdır

$$\mathcal{H}^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{H} = \left\{z \in \mathbb{C} : Arg\, z \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$$ ($\overset{*}{U}_\delta(0)$ söz konusu olduğuna dikkat ediniz!!)

** $\mathcal{H}$, $\mathbb{C}$'de kapalıdır ama sınırlı değildir. O halde; $\mathcal{H}$, $\mathbb{C}$'de tıkız olamaz. (Neden $\mathcal{H}$, $\mathbb{C}$'de sınırlı değildir?)