KOMPLEKS ANALİZ

Hüseyin IRMAK

Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Çankırı

2017

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlangıç bölümünde, karmaşık analizin temelini teşkil eden ve adına da kompleks (karmaşık) sayılar denen sayılardan, bu sayıların oluşturduğu kompleks sayılar kümesinden, bu küme üzerindeki temel cebirsel yapılardan, kompleks düzlemden ve kompleks sayılar kümesinde veya kompleks düzleminde tanınlanan temel kavramlardan ve bazı topolojik kavramlardan bahsedeceğiz.

Bu sayılar ve bu küme bildiğimiz reel (gerçel) sayılarını (kümesini) de içine alan ve çok temel bazda geçmişte de sıkça karşılaştığımız $x+\sqrt{-1}\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ şeklindeki alışılmışın dışındaki sayılar ve bu sayıların oluşturduğu bu kümenin oluşturulmasındaki dayanaklar oldukça önemli olacaktır. Özellikle, belirtilen sayılardaki $y=0$ seçimiyle $x+\sqrt{-1}\,0=x$ şeklindeki reel sayıların ve doğal olarak reel sayılar kümesindeki olası karşılaştırmalarının da öneminden bahsedeceğiz.

Şimdi belirtmiş olduğumuz sayıların (kümenin) dayanağı olan bazı aksiyomatik yapıları hatırlayalım.

Bildiğimiz reel (gerçel) sayılar kümesi, yani $\mathbb{R}$ ve analitik düzlemdeki (koordinat sistemdeki) ikililerin kümesi de $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ olduğunu ve bunun da

$$\big\{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\big\}$$

şeklindeki sıralı ikililerin oluşturduğu küme olduğunu bilmekteyiz. Bu çarpım kümesi Üzerinde aşağıdaki (bildiğimiz) gibi dayanağı olan tanımları da bilmekteyiz.

(i) $\big(x_1, x_2\big)=\big(y_1, y_2\big) \;\Leftrightarrow\; \big[x_1=y_1 \text{ } ve \text{ } x_2=y_2\big]$

(ii) $\big(x_1, x_2\big)+\big(y_1, y_2\big)=\big(x_1+y_1, x_2+y_2\big)$

ve

(iii) $\big(x_1, x_2\big)\cdot\big(y_1, y_2\big)=\big(x_1 y_1-x_2 y_2, x_1 y_2+x_2 y_1\big)$

Üstte belirtilen "eşitlik", " toplama" ve "çarpma" işlemleri ilgili küme üzerinde tanımlanan ve bilmiş olduğumuz sırılı ikililerin temel aksiyomatik yapılarına dayan kümedir. Şimdi bu kümeden ve aksiyometik dayanaklardan yola çıkarak yeni sayı ve sayı kümesini oluşturmaya çalışalım. Bunun için de ilgili sıralı ikilileri, yani (x, y) şeklindeki ikilileri oluşturacağımız yeni sayımız olan z ve bu ikililerin oluşturuduğu kümeyi de $\mathbb{C}$ ile gösterdiğimizi düşünerek adınlarına da kompleks (karmaşık) sayılar ve kompleks sayılar kümesi diyelim

$$\mathbb{C}=\big\{z=(x, y): x, y \in \mathbb{R}\big\}$$

şeklindeki kümeyi göz çnüne alalım.

Hatırlayacağınız üzere, $(x, 0)$ şeklindeki her bir sıralı ikiliyi x olarak yazmayı tercih ederiz. İşte bu açıdan bakıldığında kompleks sayılar olarak olarak tanımlana bu sıralı ikililerin oluşturduğu $\mathbb{C}$ kümesi doğal olarak $\mathbb{R}$ kümesini de içereceği açıkça görülmektedir.

$z = (x, y)$ şeklinde göstermiş olduğumuz bu sayıların, yani kompleks sayıların "x" olan kısmına, yani sıralı ikilinin birinci bileşenine z kompleks sayısının reel kısmı adını verelim ve bu durumu da $\Re(z) = x$ veya $\Re e(z) = x$ şeklinde ve "y" olan kısmına, yani sıralı ikilinin ikinci bileşenine de z kompleks sayısının sanal kısmı adını verilim ve bunu da $\Im(z) = y$ veya $\Im m(z) = y$ şeklinde gösterilim.

Bu yeni tanımlama için, üstte belirtilen (i)-(iii) deki aksiyonlar tekrar göz önüne alınırsa, kolayca;

(i′) $z_1 = \big(x_1, x_2\big) = \big(y_1, y_2\big) = z_2 \;\Leftrightarrow\; z_1 = z_2$ açık ilişkisi sonucu reel kısımların kendi aralarında ve sanal kısımların da kendi aralarında bir eşitlik ilkesini (ilişkisini),

(ii′) $\big(x_1, x_2\big) + \big(y_1, y_2\big) = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2\big) = z_1 + z_2$ açık ilişkisi sonucu reel kısımların kendi aralarında ve sanal kısımların da kendi aralarında bir toplanması ilkesini (ilişkisini)

(iii′) $\big(x_1, x_2\big) \cdot \big(y_1, y_2\big) = \big(x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1\big)$ açık ilişkisi sonucu da reel kısımların kendi aralarında ve sanal kısımların da kendi aralarında bir çarpma ilkesini (ilişkisini) doğurucakları açıktır.

Özellikle,

$$(x, 0) + (0, y) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z \quad \big(\text{ (i′)'den }\big),$$

$$(0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 + y) = (0, y) \quad \big(\text{ (iii′)'den }\big),$$

ve her ikisinden de

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y) = z \qquad (*)$$

sonuçlarına sorunsuzca varılır.

Üstteki bilgiler dahilinde ve $i = (0, 1)$ şeklindeki kabul sonucu, (*)'daki eşitliten kolayca

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = (x, 0) + i \cdot (y, 0) = (x, y) = z$$

ve

$$i = (0, 1) \;\Rightarrow\; i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

şeklindeki önemli ilişkiler elde edilir.

Bu üstteki mantıklı işlemler sonucu, başlangıçta belirtmiş olduğumuz "toplama" ve "çarpma" gibi temel cebirsel işlemlerle sıkıntısız aşağıdaki işlemler (ilişkiler) hiç bir problem yaşanmadan kolayca elde edilebilir. Bunun için $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$ şeklinde kabul ettiğimiz kompleks sayılar için;

(i″) $z_1 = \big(x_1, x_2\big) = \big(y_1, y_2\big) = z_2 \;\Leftrightarrow\; z_1 = x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 = z_2$ açık ilişkisi sonucu reel kısımların kendi aralarında ve sanal kısımların da kendi aralarında bir eşitlik ilişkisini,

(ii″) $\big(x_1, x_2\big) + \big(y_1, y_2\big) = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2\big) = z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$ açık ilişkisi sonucu reel kısımların kendi aralarında ve sanal kısımların da kendi aralarında bir toplanması ilişkisini ve

(iii″) $\big(x_1, x_2\big) \cdot \big(y_1, y_2\big) = \big(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1\big)$ olduğunu biliyoruz ve temel cebirsel işlemler, yani açık ilişkisi $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ sayılarınının çapımıyla,

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_2x_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_2x_2) - y_1y_2$$

elde edilir ki bunun da (iii)'deki ifadeye denk olan ilişkisini doğuracaktır.

Bu son yapılandırma sonucu, böylesi sayılar yeni şekilsel durumu ve kümesi

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{z : z = (x, y)\ ve\ x, y \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{z : z = x + iy\ ve\ x, y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\big\} \end{aligned}$$

şeklindeki yazımla netleşecektir. Böylece, kompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler açısından da aşağıdaki şartları sağlamayan bir kümenin varlığı netleşecektir. Gerekli cebirsel araştırmaları ve detayları sizlere bırakıyoruz.

(a) $\mathbb{C}$ kümesi toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur. Yani;

- Toplama (+) işlemine göre kapalılık özelliği sağlanır,
- Toplama (+) işlemine göre değişme özelliği sağlanır,
- Toplama (+) işlemi göre birleşme özelliği sağlanır,
- Toplama (+) işlemine göre etkisiz (birim) öğe vardır ve buda $e_{\mathbb{C}} = 0 + i0 = 0$ dır,
- Toplama (+) işlemine göre her $z \in \mathbb{C}$ öğesinin tersi tersi vardır ve bu da $-z$ dır.

(b) $\mathbb{C}$ kümesi çarpma işlemine göre bir değişmeli gruptur. Yani;

- Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre kapalılık özelliği sağlanır,
- Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre değişme özelliği sağlanır,
- Çarpma $(\cdot)$ işlemi göre birleşme özelliği sağlanır,
- Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre etkisiz (birim) öğe vardır ve buda $e_{\mathbb{C}} = 1 + i0 = 1$ dir,
- Çarpma $(\cdot)$ işlemine göre her $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ öğesinin tersi tersi vardır ve bu ters öge genellikle z^{-1} ile gösterilen ögedir. Şimdi, durumu görelim. Bunun için, her $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ öğesi verildiğinde çarpma işlemine göre tersi olan z^{-1} bulmak durumundayız. O zaman,

verilen her $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ için öyle bir $z^{-1} = u + iv$ şeklindeki kompleks sayısı var ve $z \cdot z^{-1} = 1$ olmak zorundadır. O halde,

$$z \cdot z^{-1} = (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu) = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \Big(xu + (-y)v = 1 \ ve \ yu + xv = 0 \Big)$$

denklem sistemi çözüldüğünde

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ve \quad y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

bulunur. O halde, aranan (çarpma işlemine ters öge olan) z^{-1} kompleks sayısı

$$z^{-1} = u + iv = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

sayısı olur. Gayet açıktır ki $x^2 + y^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ ve \ y = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0 + i0 = 0$ dır. Bu durum zaten göz önüne alınmamıştır.

(c) $\mathbb{C}$ kümesi çarpma işlemine toplama işlemi üzerine dağılma özellikleri de sağlanır. Yani;

- Çarpma $(\cdot)$ işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği sağlanır,
- Çarpma $(\cdot)$ işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği sağlanır.

Üstteki cebirsel işlemler sonucu aşağıda verilenler kolayca ifade edilebilir ve görülebilir. Yani, her $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ için

$$z_1 z_2^{-1} = z_1 \tfrac{1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0) \quad , \quad \tfrac{1}{z_1 z_2} = \tfrac{1}{z_1} \tfrac{1}{z_2} = z_1^{-1} z_2^{-1} \quad (z_1 \neq 0 \ , \ z_2 \neq 0) \ ,$$

$$\tfrac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2) z_3^{-1} = \tfrac{z_1}{z_3} + \tfrac{z_2}{z_3} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} \quad (z_3 \neq 0) \ ,$$

$$(z_1 z_2)(z_2^{-1} z_1^{-1}) = z_1 (z_2 z_2^{-1}) z_1^{-1} = z_1 z_1^{-1} = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0) \ ,$$

$$\tfrac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\tfrac{z_1}{z_3} \right) \left(\tfrac{z_2}{z_4} \right) = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_4^{-1} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0) \ .$$

Alıştırmalar 1.1.

(i) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2i$ ve $z_3 = 1 + i$ olduklarına göre, aşağıda istenenleri bulunuz.

$3z_1$, $z_1 + z_2$, $2z_3 - 2z_2$, $z_3 - iz_2 + 3z_1$, $z_1 z_3 - z_2$, $z_2(z_1 - z_3)$, $(z_1 - 2z_2)(z_3 - 3z_2)$

(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki bir ikinci dereceden denklem için aşağıdakilerin doğruluklarını görünüz.

(a) $\Delta = 0$ ilgili denkleminin sadece bir tane reel (gerçel) kökü vardır.

(b) $\Delta > 0$ ise bu denkleminin birbirinden farklı iki reel (gerçel) kökü vardır.

(c) $\Delta < 0$ ise bu denkleminin reel (gerçel) kökleri yoktur. Eğer bir kökü $\alpha + i\beta$ ise diğer kökü de $\alpha - i\beta$ dır.

(iii) $z = i$, $z = 1 - i$, $z = i + 1$ ve $z = -i$ kompleks sayılarının $z^2 - z = 0$, $z^2 - iz = 0$, $iz^2 - (2 + i)z = 0$, $iz^2 - 2z + i = 0$, $z^3 - iz = 0$, $z^4 - 4iz = 0$ ve $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ kompleks denklemlerinin birer çözümleri olup olmadıklarını araştırınız.

(iv) $z^2 - z + 3 = 0$, $z^2 - iz + 1 = 0$, $iz^2 - 2z - 1 = 0$, $iz^2 - 2iz + 1 = 0$, $z^3 - 4z = 0$, $z^4 - 4 = 0$ ve $z^2 - (1 + i)z + 3 - i = 0$ denklemlerinin $\mathbb{C}$ kümesindeki tüm çözümlerini bulunuz.

(v) Her $z \in \mathbb{C}$ için $w^2 - z = 0$ denkleminin daima çözümü vardır. Bu çözümü belirlerken $w = (u, v)$ ve $z = (x, y)$ şeklindeki kompleks sayıların ikililer şeklindeki ilişkilerini kullanınız. Aynı mantığı; $z^2 = i$, $z^2 = -2i$, $z^2 = 1-i$, $3z^2 = 2+3i$ ve $iz^2 = -3$ denklemleri için de uygulayınız.

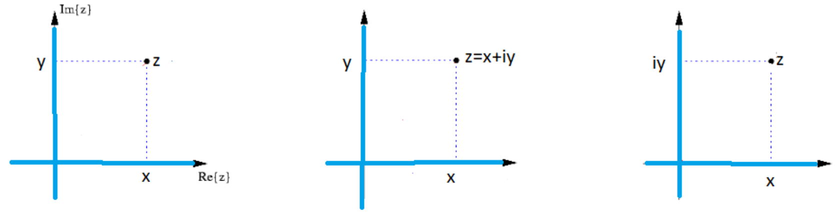
(vi) $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde sıralama bağıntısının olduğunu biliyoruz. Bu durum $\mathbb{C}$ kümesinde söz konusu değildir. Neden?

Kompleks sayıların işaasında (x, y) ikilileri ile ilgili aksiyomatik yapılardan yola çıkmıştık. Doğal olarak, bu ikililerin yeni bir inşaası söz konusu olduğuna göre, bilmiş olduğumuz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzlemi temel geometrik ve analatik sonuçlar açısından bizlere daha çok bilgiler sunacaktır.

Örneğin, $z = (x, y) = x + iy$ şeklindeki her bir kompleks sayı $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ düzlemindeki bir $P(x, y)$ noktasına karşılık gelecektir. Analitik geometri derslerinden bilmiş olduğumuz bu durum bizler için oldukça önemlidir. Dolayısıyla, Kompleks düzlemdeki her bir sayı analitik (kartezyen) düzlemindeki sadece bir noktaya karşılık getirilebir. Yani,

$$P = P(x, y) \ \leftrightarrow \ z = x + iy = (x, y)$$

şeklideki ilişki daima söz konusu olacaktır. İşte bu prensibe göre oluşturulan düzleme *kompleks düzlem*, *analitik düzlem* veya $z-$*düzlemi* adları verilir. Bu düzlemin bilimdik x-ekseni *reel eksen* ve y-ekseni de *sanal (imajiner) eksen* adlarıyla anılır ve bilindik $z = (x, y) = x + iy = 0 + i0 = 0$ noktası da bu yeni düzlemin merkezi veya orjini olarak kabul edilir. Genelde, bu kompleks düzlem ve bu düzlemin her bir öğesi olan $z = x + iy$ kompleks sayısını da aşağıdaki gibi gösterim yoluna gidilerek, kartezyen düzleminde bilindik hiçbir bilgiyle tezatlık oluşturmadan sistem kurulur. Aşağıda dümlemler incelendiğinde, ilgili düzlemlerin herbirinin birer Kompleks düzlemi ifade edeceği açıkça gözlemlenir.



Örnek 1.1. Kompleks düzlemde aşağıdaki gibi çeşitli kümeler verilmiştir. Grafiklerini ilgili düzlemde çizelim.

(a) $\mathcal{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) > 1\}$ **(b)** $\mathcal{H}_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(iz) < -1\}$

(c) $\mathcal{H}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\Im m(z)| = 4\}$ **(ç)** $\mathcal{H}_4 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z)\Im m(z) = 1\}$

(d) $\mathcal{H}_5 = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) = -2\}$ **(e)** $\mathcal{H}_6 = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Im m(z-i) \leq 2\}$

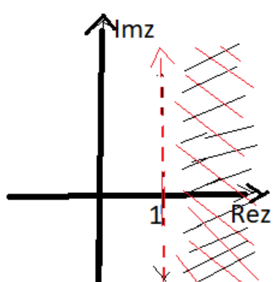
(f) $\mathcal{H}_7 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) > \Im m(z)\}$ **(g)** $\mathcal{H}_8 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) + \Im m(z) = 1\}$

(h) $\mathcal{H}_9 = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(iz-2) = 3\}$ **(ı)** $\mathcal{H}_{10}\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z+1-i) \geq 3\}$

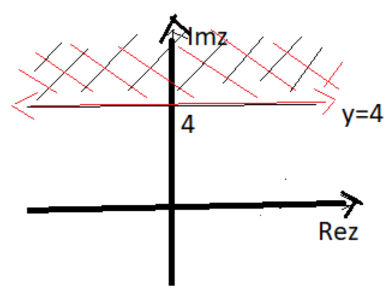
Çözüm 1.1. Sadece (a)'daki $\mathcal{H}_1$ ve (ı)'daki $\mathcal{H}_{10}$ verilen kümeleri belirleyip diğerlerini sizlere bırakılım.

(a) $\Re e(z) = \Re e(x+iy) = x > 1$ olup, buna ilişkin çizim de aşağıdaki gibi grafik-(a)'da verilmiştir.

(b) $\Im m(z+1-i) = \Im m\big(x+iy+1-i\big) = \Im m\big[(x+1)+i(y-1)\big] = y-1 \geq 3 \;\Rightarrow\; y \geq 4$ olup, buna ilişkin çizim de aşağıdaki gibi grafik-(b)'de verilmiştir.

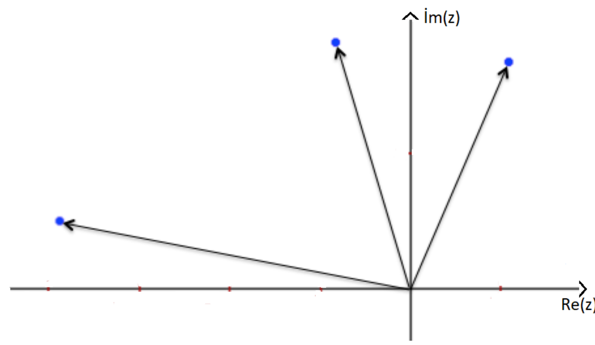


(a)

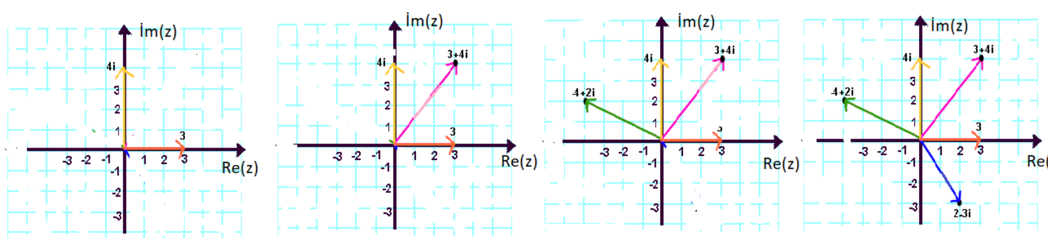


(b)

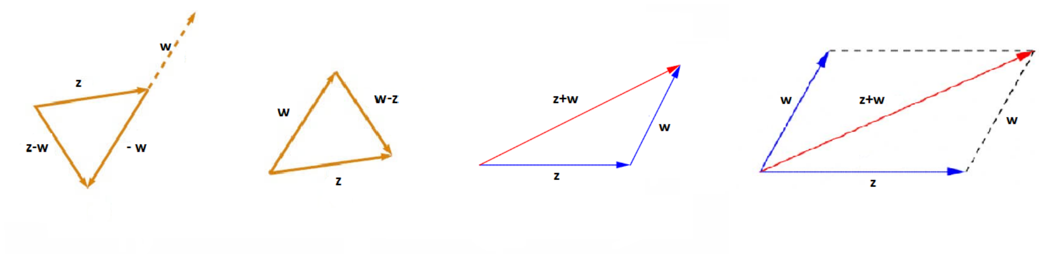
Bilmiş olduğumuz vektörel ilişki yine kartezyen düzlemindeki bilindik vektörel ilişkilerin oluşturulabilmesi kompleks sayılar için de mümkündür. Kompleks analizde de kullanılabilen bu durum, *vektör* terimiyle sadece bir yön söz konusu olduğunu bildiğimize göre, bu yeni düzlemde vektör mantığını oluşturmak da oldukça kolay olacaktır. Kısacası, z bir kompleks sayısı kompleks düzlemde bir noktayı, $\vec{z}$ ile de bir orjinden z noktasına doğru çizilen bir vektörünü ifade edecektir. Bu geometrik anlam ise, $\mathbb{R}^2$'deki bilmiş olduğumuz anlamdan başka birşey değildir. Bazı örneklerndirmeler aşağıda verilmiştir.



Ayrıca aşağıda kompleks düzlemde çeşitli noktalar verilmiş ve herbiri bu düzlemde hem işaretlenmiş hem de vektörel gösterimiyle belirlenmiştir. Lütfen inceleyiniz.

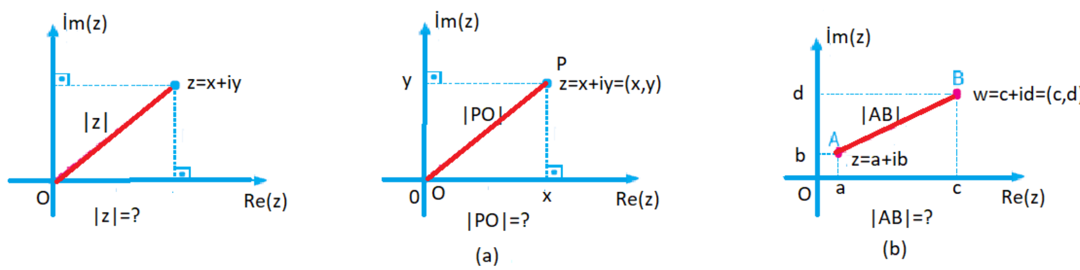


Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $z + w \in \mathbb{C}$ olduğunu belirtmiştik. Bu durumun doğrulunu $z = a + ib = (a, b)$ ve $w = u + iv = (u, v)$ şeklinde ikililer olarak kartezyen düzleminde göz önüne alınırsa $z + w$ işleminin sonucuna ilişkin ve literatürde sıkça bildiğimiz "Bir paralelkenarın köşegenini" verereceğini kolayca görülebilinir. Benzeri şekilde $z - w \in \mathbb{C}$ işelminin de geometrik ilişkisi de elde edilebilir. Bu işlemlere vektörel anlam katıldığında, her iki işlemin de bir üçgenin kenarları arasındaki bilindik kenar ilişkilerinden açıkça görülecektir. Bizler, bu iki işleme ilişkin kompleks düzlemdeki şekilsel ilişkileri vermek ve detayı da sizlere bırakmak istiyoruz.



Şimdi kompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlanan temel kavramları tanıtalım.

Tanım 1.1. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı verilsin. Bu durumda; bu z kompleks sayısının modülü $|z|$ ile gösterilir, "Modül z" şeklinde okunur ve $z = x + iy$ komleks sayısının modülü, $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımlama z kompleks sayısının orjine olan uzaklığını ifade eder. Bunun için, aşağıdaki gibi (a) ve (b)'deki grafiklerin gözden geçirilmesini sizlere bırakalım ve aşağıdaki gibi araştırmaları bizler yapalım.



(a)'da istenen uzaklık, yani $|PO|$ uzaklığı $P = P(x, y)$ ile $O = O(0, 0)$ nokataları arasındaki uzaklık olacağına göre,

$$|PO| = |z| = |x + iy| == \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şeklinde olacağı açıktır.

(b)'de istenen uzaklık ise kompleks düzlemde iki nokta arasındaki uzaklıktır. Bu da, yine $|AB|$ şeklindeki uzaklıktır ve $z = a + ib = (a, b)$ ile $w = c + id = (c, d)$ şeklinde iki nokta arasındaki uzaklık olacaktır. Bu da kolayaca,

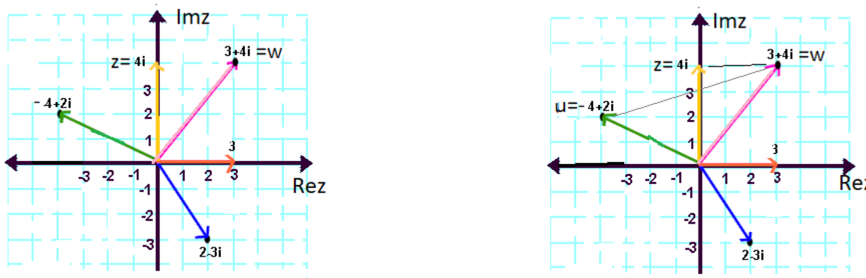
$$|AB| = |w - z| = |c + id - (a + ib)| = |(c - a) + i(d - b)| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

şeklindeki (a, b) ile (c, d) noktaları arasındaki bilindik uzaklık olur.

Uyarı 1.1. Kompleks sayılar kümesinde sıralama bağıntısının olmadığını biliyoruz. Fakat kompleks sayılarının modülü ile sıralama elbette ki söz konusudur. Böylesi bir sıralma da

$|z_1| < |z_2| < |z_3| < \cdots$ gibi sıralamadır. Bu gibi sıralamalar ise bize orjine en yakın veya en uzak kompleks sayılar arsındaki bilgileri verir.

Örnek 1.2. Aşağıda bazı kompleks sayılar kompleks düzlemde gösterilmiş ve bazıları için bazı modül işlemleri gerçekleştirilmiştir. Diğerleri için de benzeri belirlemeleri sizler yapınız.



(a) (b)

(a)'daki verileri göre, verilen noktaların orjine olan uzaklıkları, yani ilgili kompleks sayıların modüllerinin belirlenmesi söz konusudur. Bazıları,

$$|u| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = 2\sqrt{5}\ br$$

ve

$$|z| = |0+4i| = \sqrt{(0)^2+(4)^2} = \sqrt{0+16} = 4\ br$$

olarak belirlenir.
(b)'deki verileri göre de, verilen noktalar arasındaki uzaklıkların belirlenmesi söz konusudur. Bunun için, $|u-w|$ ve $|w-z|$ modüllerini bizler bulalım. Diğerlerini de sizler belirleyiniz.

$$|u-w| = |-4+2i-(3+4i)| = |-7-2i| = \sqrt{(-7)^2+(-2)^2} = \sqrt{23}\ br$$

ve

$$|w-z| = |3+4i-4i| = |3+i0| = \sqrt{(0)^2+(3)^2} = 3\ br$$

Modüle ilişkin aşağıda çeşitli sorular verilmiştir. İstenenleri yapınız.

Alıştırmalar 1.2.

1-) Aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

(a) $Ç = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\ (r > 0) \right\}$ kümesinin kompleks düzlemde z_0 merkezli ve r br yarıçaplı bir çemberi belirilediğini görünüz ve ilgili kümeyi ilgili düzlemde çiziniz.

(b) $İç(Ç) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\ (r > 0) \right\}$ kümesinin kompleks düzlemde z_0 merkezli ve r br yarıçaplı bir daireyi belirilediğini görünüz ve ilgili kümeyi ilgili düzlemde çiziniz.

(ç) Dış$(\text{Ç}) = \big\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r \ (r > 0) \ \big\}$ kümesinin kompleks düzlemde z_0 merkezli ve r br yarıçaplı bir dairesin dışının belirilediğini görünüz ve ilgili kümeyi ilgili düzlemde çiziniz.

2-) Aşağıda merkezi ve yarıçapı verilen kompleks formdaki çemberlerin denklemlerini belirleyiniz ve grafiklerini kompleks düzlemde çiziniz.

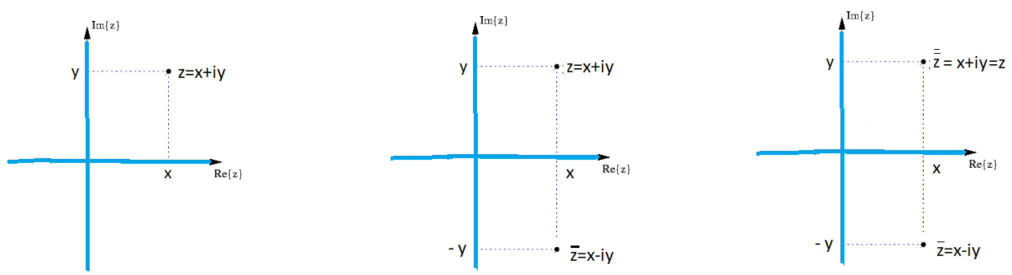
$$z_0 = i \ , \ r = 1 \ ; \ z_0 = -2i \ , \ r = 4 \ ; \ z_0 = 1 + i \ , \ r = 2 \ ; \ z_0 = 3 - 2i \ , \ r = 4 \ .$$

3-) Aşağıda çeşitli kümeler verilmiştir. Herbirini kompleks düzlemde belirleyiniz.

$$\big\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\big\} \ , \ \big\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 4\big\} \ , \ \big\{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| = 1\big\} \ ,$$

$$\big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4\big\} \ , \ \big\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\big\} \ , \ \big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| \leq 2\big\} \ .$$

Tanım 1.2. Verilen herhangi bir $z = x + iy$ kompleks sayısının eşleneği $\overline{z}$ ile gösterilir ve $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ şeklinde tanımlanır. Kompleks düzlemde bu durum göz önüne getirilirse, eşleneğin geometrik anlamının reel eksene göre biribirinin simetrisi olduğu kolayca görülür.



Örnek 1.3. $\overline{2} = 2$, $\overline{i} = -i$ ve $\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$ dir.

Aşağıda çeşitli teoremler verilmiştir. Bazılarını ispatlayıp diğerlerini de szilere bırakalım.

Teorem 1.1.

1-) $z, w \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıda verilenlerin herbiri daima doğrudur.

(a) $|z|^2 = [\Re e(z)]^2 + [\Im m(z)]^2$	**(b)** $\Re e(z) \leq |\Re e(z)| \leq |z|$	**(c)** $\Im z(z) \leq |\Im z(z)| \leq |z|$
(ç) $\Re e(z) = \Re e(\overline{z})$	**(d)** $\Im m(z) = -\Im m(\overline{z})$	**(e)** $2\Re e(z) = z + \overline{z}$
(f) $2i\Im m(z) = z - \overline{z}$	**(g)** $|z| = |\overline{z}|$	**(ğ)** $\overline{\overline{z}} = z$
(h) $z\overline{z} = |z|^2$	**(ı)** $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$	**(i)** $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
(j) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$	**(k)** $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$	**(l)** $|zw| = |z||w|$

(m) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ **(n)** $\big|z\big| = |-z|$

(o) $|z+w| \le |z| + |w|$ (Üçgen Eşitsizliği)

(ö) $||z| - |w|| \le |z+w|$ (Ters Üçgen Eşitsizliği)

2-) Her $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ için $z_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere, aşağıda verilenlerin herbirini tümevarım metodunu kullanarak ispatlayınız.

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n} \;\;, \;\; \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \;\cdots\; \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \;\cdots\; \cdot \overline{z_n} \;,$$

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \;\cdots\; \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \;\cdots\; \cdot |z_n| \;, \; |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \;,$$

$$\Re e(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \Re e(z_1) + \Re e(z_2) + \cdots + \Re e(z_n) \;,$$

$$\Im m(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \Im m(z_1) + \Im m(z_2) + \cdots + \Im m(z_n) \;.$$

3-) $z, z_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $|z - z_0| = r$ $(r > 0)$ denkleminin kompleks düzlemde bir çember ifade ettiğini bilmekteyiz. Bu denklemin aynı zamanda $|z|^2 - 2\Re e(z\,\overline{z_0}) + |z_0|^2 = r^2$ denklemine eşit olduğunu görünüz.

İspat.

(g) $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |x-iy| = |\overline{x+iy}| = |\overline{z}|$ olur.

(h) $z \cdot \overline{z} = (x+iy) \cdot \overline{x+iy} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + (-iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ olur.

(l) $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = (zw) \cdot (\overline{zw}) = (zw) \cdot (\overline{w}\overline{w}) = z(w\overline{w})\overline{z} = z|w|^2\overline{z} = (z\overline{z})|w|^2$
$= |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{|zw|^2} = \sqrt{(|z||w|)^2} \;\Rightarrow\; |zw| = |z||w|$ elde edilir.

(ö)
$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\Re e\big(z\overline{w}\big) + |w|^2 \\ &\le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \big(|z| + |w|\big)^2 \;\Rightarrow\; |z+w| \le |z| + |w|\end{aligned}$$
elde edilir.

Şimdi de üstteki önermelerin bazı uygulamalarını verelim. Dikkatlice incelemeniz yeterlidir.

Örnek 1.4.

a) $\left|\left(\frac{2+i}{1-3i}\right)^2\right| = \left|\frac{2+i}{1-3i}\right|^2 = \left(\frac{|2+i|}{|1-3i|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

b) $\Re e\left(\frac{2i}{3+2i}\right) = \Re e\left(\frac{2i}{3+2i}\frac{\overline{3+2i}}{\overline{3+2i}}\right) = \Re e\left(\frac{2i}{3+2i}\frac{3-2i}{3-2i}\right) = \Re e\left(\frac{2i(3-2i)}{(3+2i)(3+2i)}\right)$

$$= \Re e\left(\frac{6i+4}{|3+2i|^2}\right) = \Re e\left(\frac{6i+4}{3^2+2^2}\right) = \Re e\left(\frac{6i+4}{13}\right) = \frac{6}{13}$$

c) $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\frac{\overline{2-i}}{\overline{2-i}}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\frac{2+i}{\overline{2-i}}\right)} = \overline{\left(\frac{(1+i)(2-i)}{|2-i|^2}\right)} = \overline{\frac{3}{5}+i\frac{1}{5}} = \frac{3}{5} - i\frac{1}{5} = \frac{3+i}{5}$

ç) $|z+2i| < 1$ olsun. Bu durmda,

$$\begin{aligned}|z^2+2iz-2+3i| &= |z(z+2i)+(-2+3i)| \le |z(z+2i)| + |-2+3i| \\ &= |z+2i-2i||z+2i| + \sqrt{13} \le \big(|z+2i| + |-2i|\big)|z+2i| + \sqrt{13} \\ &\le (1+2)\cdot 1 + \sqrt{13} = 3+\sqrt{13}\end{aligned}$$

d) $|z-i| < 2$ olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{z+2i}{z-3i}\right| = \frac{|z+2i|}{|z-3i|} = \frac{|z-i+i+2i|}{|z-i-2i|} = \frac{|z-i+3i|}{|z-i-2i|} \ge \frac{||z-i|-3|}{|z-i|+2} \cdots (1)$$

olup, $||z-i|-3|$ için bir alt sınır ve $|z-i|+2$ için de bir üst sınır belirlemek durumundayız.

$$\begin{aligned}&|z-i| < 2 \ \Rightarrow\ |z-i|-3 < 2-3 \ \Rightarrow\ |z-i|-3 < -1 \\ &\Rightarrow\ 3-|z-i| > 1 \ \Rightarrow\ 3-|z-i| > 1 \ \Rightarrow\ \big|3-|z-i|\big| > 1\end{aligned}$$

ve

$$|z-i|+2 < 2+2 = 4 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2+|z-i|} > \frac{1}{2}$$

eşitsizleri (1)'de kullanılırsa,

$$\left|\frac{z+2i}{z-3i}\right| = \cdots = \frac{|z-i+3i|}{|z-i-2i|} \ge \frac{||z-i|-3|}{|z-i|+2} > 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

sonucunu elde ederiz.

Alıştırmalar 1.3.

a) Aşağda isteneleri bulunuz.

$$\big|(z-i)^11(1+2i)^{25}\big| = ?\ ,\ \Re e\left(\frac{1-i}{2-i}\right) = ?\ ,\ \Im m\left(\frac{1+i}{2-i}\right) = ?\ ,\ \overline{\left(\frac{1+2i}{2+i}\right)} = ?$$

b) Aşağda verilen kümeleri kompleks düzlemde çiziniz.

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_1 = \big\{z\in\mathbb{C} : \Re e(iz-1) = 1\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_2 = \big\{z\in\mathbb{C} : \Im m(z^2) = -1\big\} \\ &\mathcal{H}_3 = \big\{z\in\mathbb{C} : |iz-1| = 4\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_4 = \big\{z\in\mathbb{C} : |z-i| = 1\big\} \\ &\mathcal{H}_5 = \big\{z\in\mathbb{C} : |z-i| > 1\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_4 = \big\{z\in\mathbb{C} : 1 < |z-i| \le 4\big\}\end{aligned}$$

c) $|z| > 1$ ise aşağıda verilenler için alt ve üst sınır araştırması yapınız. Mümkün ise ilgili sayıları belirleyiniz.

$$\big|(1+i)z-3i\big|\ ,\ \big|z^2-iz-3+i\big|\ ,\ \left|\frac{z-1+i}{2z-3i}\right|\ ,\ \left|\frac{z-1+2i}{z-2+i}\right|\ ,\ \left|\frac{z^2-z+2i}{z-i+3}\right|$$

ç) $|z-i| < 1$ ise aşağıda verilenler için alt ve üst sınır araştırması yapınız. Mümkün ise ilgili sayıları belirleyiniz.

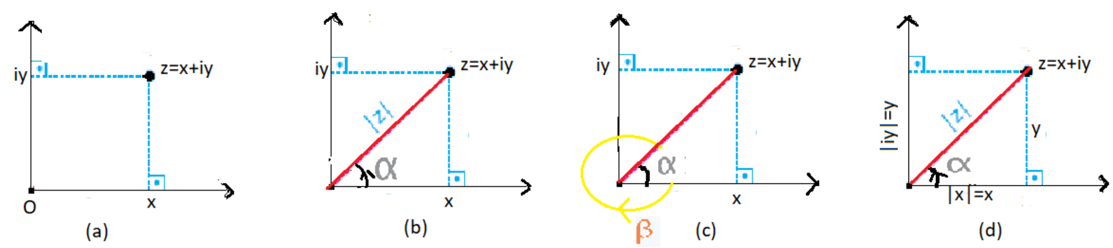
$$\big|z-3i-1\big|\ ,\ \big|z^2-z-2i\big|\ ,\ \left|\frac{z-2i}{2z+3i}\right|\ ,\ \left|\frac{2z+i}{z-i-2}\right|\ ,\ \left|\frac{z^2+2i}{z+3i}\right|\ ,\ \big|(z-1)(z+2i)\big|$$

d) $1 < |z+i| < 2$ ise aşağıda verilenler için alt ve üst sınır araştırması yapınız. Mümkün ise ilgili sayıları belirleyiniz.

$$\left|z-2i\right| \;,\; \left|z^2-i\right| \;,\; \left|\tfrac{z-2i}{2z+5i}\right| \;,\; \left|\tfrac{z+i-1}{z-i-1}\right| \;,\; \left|\tfrac{z^2+i}{z+2i}\right| \;,\; \left|z^2-iz-2\right| \;,\; \left|\tfrac{1}{z-5i}\right|$$

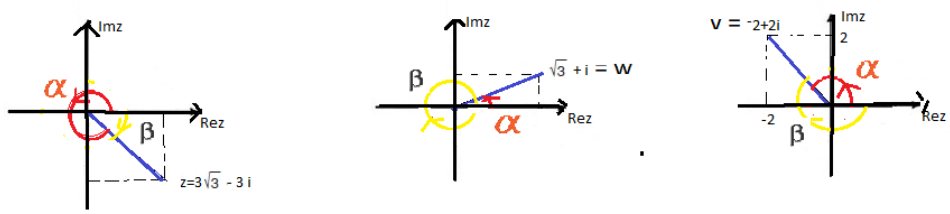
Tanım 1.3. Herhangi bir $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks $z-$düzlemindeki belirttiği nokta P olsun. OP ile reel eksen arasındaki pozitif yönlü açıya z kompleks sayısının argümanı adı verilir ve $\theta = arg(z)$ ile gösterilir. Doğal olarak, bu açının belirlenmesinde sinüs ve cosinüs fonksiyonları önemli yer alacağından ve bu fonksiyonların da 2π periyotlu oldukları söz konusu olacağından dolayı, ilgili θ açısının tek değerli olmayacağı açıktır. Bu açıyı tek değerli yapmak için ya $\theta \in [0, 2pi)$ ya da $\theta \in (-\pi, 2pi]$ şeklindeki seçimler sıkça kullanılır. Bu iki şekilde oluşturulan açı da $\theta + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ şeklinde sonsuz tane açıdan sadece iki tanesi olup, herbiri de z kompleks sayısı için birer argüman olur. Özellikle, ilgili $\theta \in (-\pi, \pi]$ şeklindeki açı seçimine ilgili kompleks sayısının *esas argümanı* adı verilir ve genellikle bu durum $Arg(z)$ ile gösterilir.

O halde, $argz = \theta + 2n\pi = Arg(z) + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ şeklindeki bir ilişkinin varlığı açıktır. Aşağıda bir esas argümanın belirlenmesi adım adım verilmiş olup, ilgili grafiklerin incelenmesi yeterli olacaktır.



(a)'daki şekilde bir $z = x+iy$ kompleks sayısının verildiği, (b)'de z'nin orjinle birleştirilmesi elde edilen doğru parçası, yani $[PO]$ parçası, (c)'de reel eksen ile $[PO]$ doğru parçası oluşturulan pozitif yönlü (yelkovanın haraket yönünün tersi yönünde oluşan) açı α ve negatif yönlü (yelkovanın haraket yönünde oluışan) açı da β olarak ifade edilmiş ve son (d)'deki şekilde de bir önceki tüm bilgiler biraraya getirilmiştir. Bu analitik akış sonucu $Arg(z) = \alpha$ olduğu kolayca belirlenmiştir.

Örnek 1.5. Aşağdaki grafiklerde farklı farklı kompleks sayıların belirlediği noktalar işaretlenmiş, α ile pozitif yönlü açılar ve β ile negatif yönlü açılar belirlenmiş ve ilgili kompleks sayıların esas argümanları belirlenmiştir. Analiz bilgilerinden herbir kompleks say için $cos(\alpha) = cos(\beta)$ ve $sin(\alpha) = sin(\beta)$ oldukları gibi periyodik durumlardan dolayı, her $n \in \mathbb{Z}$ için $cos(\alpha + 2n\pi) = cos(\beta + 2n\pi)$ ve $sin(\alpha + 2n\pi) = sin(\beta + 2n\pi)$ odukları açıktır. Üstteki açıklamlar ve bu bilgiler paralelinde, ilgili açıların doğruluklarını tekrar teyit ediniz.



(a) (b) (c)

Grafik-(a)'da $z = 3\sqrt{3} - 3i$ kompleks sayısı için $\beta = -\pi/6 \in (-\pi, \pi]$ şeklindeki açı seçimini esas argüman olarak seçebildiğimiz gibi $\alpha = 11\imath/6 \in [0, 2\pi)$ şeklindeki seçim de olabilmektedir. Yani, $arg\big(3\sqrt{3} - 3i\big) = 11\pi/6$ ve $Arg\big(3\sqrt{3} - 3i\big) = -pi/6$ seçimlerin herikisi de doğru olur.

Grafik-(b)'de verilen $w = \sqrt{3} + i$ kompleks sayısı için de $\alpha = \pi/6$ ve $\beta = -11\pi/6$ dır. Doğal olarak, $Arg(\sqrt{3} + i) = \pi/6 \in (-\pi, \pi]$ olan esas argüman doğr olan seçimdir.

Grafik-(c)'de verilen kompleks sayı da $v = -2 + 2i$ olup $\alpha = 3\pi/4$ ve $\beta = -5\pi/4$ dır. Yine, bu kompleks sayı için $Arg(-2+2i) = 3\pi/4$ şeklindeki esas argümanın seçimi doğru olan seçimdir.

Tanım 1.4. θ, verilen bir $z \neq 0$ kompleks sayısının esas argümamı göstermek üzere,

$$cos\theta = \frac{|x|}{|z|} = \frac{x}{|z|} \;\Rightarrow\; x = |z|cos\theta$$

ve

$$sin\theta = \frac{|iy|}{|z|} = \frac{y}{|z|} \;\Rightarrow\; y = |z|cos\theta$$

sonuçları kolayca elde edilir. Bu her iki veri eğer $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayısında göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} z = x + iy &= |z|cos\theta + i|z|sin\theta \\ &= |z|\big(cos\theta + isin\theta\big) \quad \big(0 \leq \theta < 2\pi\big) \\ &= |z|\big[cos\big(Arg(z)\big) + isin\big(Arg(z)\big)\big] \quad \big(-\pi < Arg(z) \leq \pi\big) \end{aligned}$$

şeklindeki önemli bir sonuç elde edilir ki buna $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayısının *kutupsal formu* adı verilir. Tabii ki sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının periyodik oldukları göz önüne alınırsa, elde edilen kutupsal formlar;

$$\begin{aligned} z = x + iy &= |z|\big[cos\big(\theta + 2n\pi\big) + isin\big(\theta + 2n\pi\big)\big] \quad \big(n \in \mathbb{Z}\big) \\ &= |z|\big[cos\big(arg(z)\big) + isin\big(arg(z)\big)\big] \quad \big(n \in \mathbb{Z}\big) \\ &= |z|\big[cos\big(Arg(z) + 2n\pi\big) + isin\big(Arg(z) + 2n\pi\big)\big] \quad \big(-\pi \leq \theta < \pi\big) \end{aligned}$$

sonucunu da yazabilmekteyiz. Örnek 1.4'deki kompleks sayıların kutupsal formları hem $arz(z)$ hem de $Arg(z)$ açılarına göre aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Lütfen dikkatlice inceleyiniz.

$$\begin{aligned}3\sqrt{3}-3i &= |3\sqrt{3}-3i|\big[cos\big(11\pi/6\big)+isin\big(11\pi/6\big)\big] = 6\big[cos\big(11\pi/6\big)+isin\big(11\pi/6\big)\big]\\ &= |3\sqrt{3}-3i|\big[cos\big(-\pi/6\big)+isin\big(-\pi/6\big)\big] = 6\big[cos\big(\pi/6\big)-isin\big(\pi/6\big)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i &= |\sqrt{3}+i|\big[cos\big(\pi/6\big)+isin\big(\pi/6\big)\big] = 2\big[cos\big(\pi/6\big)+isin\big(\pi/6\big)\big]\\ &= |\sqrt{3}+i|\big[cos\big(-11\pi/6\big)+isin\big(-11\pi/6\big)\big] = 2\big[cos\big(11\pi/6\big)-isin\big(11\pi/6\big)\big]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-2+2i &= |-2+2i|\big[cos\big(3\pi/4\big)+isin\big(3\pi/4\big)\big] = 2\sqrt{2}\big[cos\big(3\pi/4\big)+isin\big(3\pi/4\big)\big]\\ &= |-2+2i|\big[cos\big(-5\pi/4\big)+isin\big(-5\pi/4\big)\big] = 2\sqrt{2}\big[cos\big(5\pi/4\big)-isin\big(5\pi/4\big)\big]\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

Tanım 1.5. Her θ açısı için $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ gösterimine (formulüne) Euler gösterimi veya Euler formulü adı verilir. İlgili fonksiyonların periyodik durumları göz önüne alınırsa, yine ilgili formül

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta = cos\big(\theta+2n\pi\big) + isin\big(\theta+2n\pi\big) \quad \big(n \in \mathbb{Z}\big)$$

şeklinde de yazılabileceği açıktır.

Üstteki bu formül hem uygulama hem de teorik açıdan oldukça kullanışlı bir formüldür. Bunun için, aşağıdaki bazı durumları vurgulamakta fayda görmekteyiz.

i-) Her θ için

$$|e^{i\theta}| = |cos\theta + isin\theta| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1 \ ,$$

$$|we^{i\theta}| = |w||cos\theta + isin\theta| = |w|\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = |w| \ ,$$

$$e^{-i\theta} = cos(-\theta) + isin(-\theta) = cos(\theta) - isin(\theta) \ , \ |e^{-i\theta}| = 1,$$

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isin(\pi) = -1 + i0 = -1 \ , \ e^{i2\pi} = cos(2\pi) + isin(2\pi) = 1 + i0 = 1,$$

$$e^{i\pi/2} = cos(\pi/2) + isin(\pi/2) = 0 + i\,1 = i \ \cdots$$

oldukları açıktır.

ii-) Her $z = x + iy = \mathbb{C} - \{0\}$ için

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(cosy + isiny\big)$$

ve

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x|cosy + isiny| = e^x$$

olur.

Tanım 1.6. Herhangi bir $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks sayısı

$$z = |z|\big[cos\big(\theta\big) + isin\big(\theta\big)\big] = |z|e^{i\theta}$$

veya ilgili periyodik durumlar göz önüne alınırsa,

$$z = |z|\big[cos\big(\theta + 2n\pi\big) + isin\big(\theta + 2n\pi\big)\big] = |z|e^{i(\theta+2n\pi)} \quad \big(0 \leq \theta < 2\pi\big)$$

şeklinde gösterilebilinir ve bu gösterimlere z kompleks sayısının *Euler gösterim(ler)i* veya *z'nin üstel (üssel) formu* adı verilir. Bu gösterimler, Örnek 1.3'deki kompleks sayıları için göz önüne alınırsa, ilgili kompleks sayıları

$$3\sqrt{3} - 3i = 6e^{i11\pi/6} \ , \ \ \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6} \ , \ \ -2 + 2i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Ayrıca, dik üçgenlerdeki trigonometrik bağıntılar yardımıyla üstte (iii)'de verilen grafik-(d)'deki verilerden kolayca

$$tan\theta = \tfrac{y}{x} \ \Rightarrow \ \theta = tan^{-1}\big(\tfrac{y}{x}\big)$$

ve Pisagor bağıntısından da

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olduklarını biliyoruz. Doğal olarak, her $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ için

$$|z| = |x + iy| = |x + iy|e^{itan^{-1}(y/x)} = |x + iy|\big[cos\big(tan^{-1}(y/x)\big) + isin\big(tan^{-1}(y/x)\big)\big]$$

yazım da gerekli olabilmektedir.

Şimdi kompleks sayıları argümanları, kutupsal ve Euler gösterimleri ile ilgili ve oldukça da kullanışlı olan bazı temel önermeleri verelim.

Teorem 1.2. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ için aşağıda verilenler daima doğrudur.

i) $arg\big(z_1 z_2\big) = arg\big(z_1\big) + arg\big(z_2\big)$ **iii)** $arg\Big(\frac{1}{z_1}\Big) = -arg\big(z_1\big)$

ii) $arg\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) = arg\big(z_1\big) - arg\big(z_2\big)$ **iv)** $arg\big(\overline{z_1}\big) = -arg\big(z_1\big)$

İspat. Sadece (i)'de verileni ispatlayıp diğerlerini de sizlerin araştırmasına bırakalım. θ_1 ve θ_2 açıları sırasıyla z_1 ve z_2 kompleks sayıların herhangi bir argümanları olsun. O zaman,

$$z_1 = |z_1|\big(cos\theta_1 + isin\theta_2\big) \ \text{ ve } \ z_1 = |z_1|\big(cos\theta_1 + isin\theta_2\big)$$

şeklinde yazıldıklarını biliyoruz. Basit bazı elementer işlemler sonucu,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \big[|z_1|\big(cos\theta_1 + isin\theta_2\big)\big]\big[|z_1|\big(cos\theta_1 + isin\theta_2\big)\big] \\ &= |z_1||z_2|\big[cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2 + i\big(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2\big)\big] \end{aligned}$$

$$= |z_1||z_2|\big[cos\big(\theta_1+\theta_2\big)+isin\big(\theta_1+\theta_2\big)\big]$$

sonucuna varırız. Bu da bizi

$$arg\big(z_1\big)+arg\big(z_2\big)=\theta_1+\theta_2=arg\big(z_1z_2\big)$$

sonucuna kolayca götürür.

Dikkat edilirse, kompleks sayıların üstel formlarının sıkıntısız ve rahat bir uygulaması olarak üstte verilen herbir önerme için oldukça kullanışlılığı görülür. Çünkü,

$$z_1=|z_1|\big(cos\theta_1+isin\theta_2\big)=|z_1|e^{i\theta_1}$$

ve

$$z_1=|z_1|\big(cos\theta_1+isin\theta_2\big)=|z_2|e^{i\theta_2}$$

oldukları göz önüne alınırsa, kolayca

$$z_1z_2=\big(|z_1|e^{i\theta_1}\big)\big(|z_2|e^{i\theta_2}\big)=|z_1||z_2|\big(e^{i\theta_1}\big)\big(e^{i\theta_2}\big)=|z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}=|z_1z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

elde edilir.

Örnek 1.6. Aşağıda verilenleri dikkatlice inceleyiniz.

a) $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $arg(5)=0+2n\pi=2n\pi$, $Arg(5)=0$; $arg(-5)=\pi+2n\pi=(2n+1)\pi$, $Arg(-5)=\pi$; $arg(\pi)=arg(22/7)=0+2n\pi=2n\pi$, $Arg(\pi)=0$; $arg(-\pi)=arg(-22/7)=\pi+2n\pi=(2n+1)\pi$, $Arg(-\pi)=\pi$; $arg(5i)=\pi/2+2n\pi$, $Arg(5i)=(4n+1)\pi/2$; $arg(-5i)=-\pi/2+2n\pi=(4n-1)\pi/2$, $Arg(-5i)=-\pi/2$; $arg(1+i)=\pi/4+2n\pi=(8n+1)\pi/4$, $Arg(1+i)=\pi/4$; $arg(-1+i)=3\pi/4+2n\pi=(8n+3)\pi/4$, $Arg(-1+i)=3\pi/4$; $arg(1-i)=-\pi/4+2n\pi=(8n-1)\pi/4$, $Arg(1-i)=-\pi/4$; $arg(-1-i)=-3\pi/4+2n\pi=(8n-3)\pi/4$ ve $Arg(-1-i)=-3\pi/4$ şeklindeki olur ve argümanlarının herbiri de ilgili kompleks sayıların esas argümanlarıdır.

b) Her $n\in\mathbb{Z}$ ve her $z_1,z_2\in\mathbb{C}-\{0\}$ için

$$\frac{1}{z_2}=\frac{|1|e^{i0}}{|z_2|e^{i\theta_2}}=\frac{|1|}{|z_2|}\frac{e^{i0}}{e^{i\theta_2}}=\left|\frac{1}{z_2}\right|e^{i(0-\theta_2)}=\frac{1}{|z_2|}e^{-i\theta_2},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

$$\big(z_1\big)^n=\big(|z_1|e^{i\theta_1}\big)^n=\big(|z_1|e^{i\theta_1}\big)^n=|z_1|^n\big(e^{i\theta_1}\big)^n=|z_1|^ne^{in\theta_1}$$

$$\big(z_1z_2\big)^n=\big(|z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2}\big)^n=\big(|z_1z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}\big)^n=|z_1z_2|^ne^{in(\theta_1+\theta_2)}$$

Uyarı 1.2. Verilen bir kompleks sayısının argümanı olarak esas argüman kullanılmadığı bazı durumlarda problemler oluşmaktadır. Bu proplemlerin kaynağı ise $2\pi-$periyodik durumdan kaynaklanmaktadır. Bu olası sorunun ortadan kaldırılması için ya esas argümanların kullanılması ya da argümanlar kullanıldığından modüler aritmetik "Mod 2π"' şeklinde uygulanması gerekir. Bu açıdan aşağıdaki örnek oldukça önemlidir.

Örneğin,

$z_1 = -3i$ karmaşık sayısının esas argümanını değil de, $arg(-3i) = 3\pi/2$ şeklindeki argümanı ile $z_2 = 2i$ karmaşık sayısının esas argümanını olan $arg(2i) = \pi/2$ argümanları seçelim. Bu durumda,

$$arg[(-3i)(2i)] = arg\big(-6i^2\big) = arg(6) = 0 \neq 2\pi = 3\pi/2 + \pi/2 = arg(-3i) + arg(2i)$$

şeklindeki farklı sonuçlar bulunur. Halbui ki, eğer $z_1 = -3i$ kompleks sayısı için de esas değer, yani $arg(-3i) = -\pi/2$ olarak alınsaydı

$$arg[(-3i)(2i)] = arg\big(6\big) = arg(6) = 0 = -\pi/2 + \pi/2 = arg(-3i) + arg(2i)$$

eşit olan ilişki görülürdü. Bu durum için, eğer modüler aritmetik dikkate alınırsa

$$arg(-3i) + arg(2i) = 0 \quad (\text{ Mod } 2\pi)$$

sonucu elde edilecektir. Bu ise $arg(6) = 0$'ya eşit olacaktır. Böylece, olası sorun da ortadan kalkacaktır.

Bu üstteki bilgilendirme doğrultusunda, Teorem 1.2'yi tekrar aşağıdaki gibi iki şekilde belirtmekte fayda görmekteyiz.

Teorem 1.2$'$. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ için aşağıda verilenler daima doğrudur.

i$'$) $arg\big(z_1z_2\big) = arg\big(z_1\big) + arg\big(z_2\big) \quad \big(\text{ Mod } 2\pi\big)$ **iii$'$)** $arg\big(\frac{1}{z_1}\big) = -arg\big(z_1\big) \quad \big(\text{Mod } 2\pi\big)$

ii$'$) $arg\big(\frac{z_1}{z_2}\big) = arg\big(z_1\big) - arg\big(z_2\big) \quad \big(\text{Mod } 2\pi\big)$ **iv$'$)** $arg\big(\overline{z_1}\big) = -arg\big(z_1\big) \quad \big(\text{Mod } 2\pi\big)$

Teorem 1.2$''$. Her $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ için aşağıda verilenler daima doğrudur.

i$''$) $Arg\big(z_1z_2\big) = Arg\big(z_1\big) + Arg\big(z_2\big)$ **iii$''$)** $Arg\Big(\frac{1}{z_1}\Big) = -Arg\big(z_1\big)$

ii$''$) $Arg\Big(\frac{z_1}{z_2}\Big) = Arg\big(z_1\big) - Arg\big(z_2\big)$ **iv$''$)** $Arg\big(\overline{z_1}\big) = -Arg\big(z_1\big)$

Teorem 1.2 ve bunun üstte belirtmiş olduğumuz diğer hallerini genelleştirelebilmekteyiz. Herbirinin ispatını, tümevarım metodunu kullanarak ispatlayınız.

Alıştırmalar 1.3.

i) Aşağıda belirtilen esas argümenanları bulunuz.

$$Arg\big((1-i)^3\big)\ ,\ Arg\big((1+i)^{-3}\big)\ ,\ Arg\big(\tfrac{1-i}{1+i}\big)\ ,\ Arg\big(\tfrac{(1-i)^2}{(1+i)^3}\big)\ ,\ Arg\big((1-i)^3(1+i)^5(1+i\sqrt{3})\big)$$

ii) Aşağıda verilen kümleri kompleks düzlemde çiziniz.

$$\mathcal{H}_1 = \big\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) = \pi\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_2 = \big\{z \in \mathbb{C} : |Arg(z)| = \pi/2\big\}\ ,$$
$$\mathcal{H}_3 = \big\{z \in \mathbb{C} : Arg(iz) = \pi/2\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_4 = \big\{z \in \mathbb{C} : \pi/4 \leq Arg(z) < \pi\big\}\ ,$$
$$\mathcal{H}_5 = \big\{z \in \mathbb{C} : |Arg(iz)| < \pi/6\big\} \quad , \quad \mathcal{H}_6 = \big\{z \in \mathbb{C} : \pi \leq Arg(z+1-i) = \pi/4\big\}\ .$$

iii) $\kappa \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, her $i = 1, 2, \cdots, n$ ve $z_i, w_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ için aşağıda verilenler daima doğrudur.

a) $arg\big(z_1^{\kappa}\big) = \kappa\, arg\big(z_1\big) \quad (\text{Mod } 2\pi)$

b) $arg\big(z_1 z_2 \ \cdots \ z_n\big) = arg\big(z_1\big) + arg\big(z_2\big) + \ \cdots \ + arg\big(z_m\big) \quad (\text{Mod } 2\pi)$

c) $arg\big(\frac{1}{z_1 z_2 \ \cdots \ z_n}\big) = -arg\big(z_1\big) - arg\big(z_2\big) - \ \cdots \ - arg\big(z_m\big) \quad (\text{Mod } 2\pi)$

ç) $arg\big(\overline{z_1 z_2 \ \cdots \ z_n}\big) = -arg\big(z_1\big) - arg\big(z_2\big) - \ \cdots \ - arg\big(z_m\big) \quad (\text{Mod } 2\pi)$

d) $arg\big(\frac{z_1 z_2 \ \cdots \ z_n}{w_1 w_2 \ \cdots \ w_n}\big) = arg\big(z_1\big) + arg\big(z_2\big) + \ \cdots \ + arg\big(z_m\big)$

$$-arg\big(w_1\big) - arg\big(w_2\big) - \ \cdots \ - arg\big(w_m\big) \quad (\text{Mod } 2\pi)$$

Şimdi, oldukça önemli ve kullanışlı olan ve literatürde de *De Moivre Formülü* olarak bilinen önermeyi verip ve ispatlayalım.

Teorem 1.3. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için $\big(cos\theta + isin\theta\big)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$ dır.

İspat.

(i) $n = 0$ hali açıktır.

(ii) n pozitif sayı olsun. Bu durum ise, Tümerım ile ispata uygun bir önerme olur. (Neden?) Bunun için;

$n = 1$ ise eşitlik açıktır.

$n = k$ için $\big(cos\theta + isin\theta\big)^k = cos(k\theta) + isin(k\theta)$ doğru olduğunu varsayalım.

$n = k + 1$ için $\big(cos\theta + isin\theta\big)^{k+1} = cos[(k+1)\theta] + isin[(k+1)\theta]$ önermesinin doğru olduğunu göstermek durumundayız. Görelim.

$$\big(cos\theta + isin\theta\big)^{k+1} = \big(cos\theta + isin\theta\big)^k \big(cos\theta + isin\theta\big)$$

olup ve varsayımımız burada kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \big(cos\theta + isin\theta\big)^{k+1} &= \big[cos(k\theta) + isin(k\theta)\big]\big(cos\theta + isin\theta\big) \\ &= cos(k\theta)cos(\theta) + icos(k\theta)sin\theta + isin(k\theta)cos\theta - sin(k\theta)sin\theta \\ &= cos[(k+1)\theta) + isin[(k+1)\theta) \end{aligned}$$

pozisitif samsayılar için ispat biter.

(iii) n negatif tamsayı sayı olsun. Bu durumda $n = -m$ ilişkisi gereği, m bir pozitif tamsayı durumundadır. O zaman,

$$\begin{aligned} \big(cos\theta + isin\theta\big)^n &= \big(cos\theta + isin\theta\big)^{-m} \\ &= \tfrac{1}{(cos\theta + isin\theta)^m} \\ &= \tfrac{1}{(cos\theta + isin\theta)^m} \cdot \tfrac{\overline{(cos\theta + isin\theta)^m}}{\overline{(cos\theta + isin\theta)^m}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\overline{(cos\theta+isin\theta)^m}}{|(cos\theta+isin\theta)^m|}$$
$$= \frac{[\,\overline{cos\theta+isin\theta}\,]^m}{|cos\theta+isin\theta|^m}$$
$$= [\,cos(-\theta)+isin(-\theta)\,]^m \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

elde edilir ki bunun için de zaten (ii)'de ispat yapılmıştı.

Bu formülün bir uyugulaması olarak, aşağıdaki örneği vermekte fayda görüyüruz. İnceleyiniz.

$$\begin{aligned}(cos\theta + isin\theta)^2 &= cos^2\theta + 2icos\theta sin\theta + i^2sin^2\theta \\ &= cos^2\theta - 2sin^2\theta + i2cos\theta sin\theta = cos(2\theta) + isin(2\theta)\end{aligned}$$

olup ütte her iki tarafın reel ve sanal kısımlarından, kolayaca

$$cos(2\theta) = cos^2\theta - 2sin^2\theta \ \text{ ve } \ sin(2\theta) = 2cos\theta sin\theta$$

trigonometrinin bilindik temel bağıntıları elde edilir.

Alıştırmalar 1.4. Aşağıda istenenleri bulunuz.

a) $cos(3\theta)$ ve $sin(3\theta)$'yı $cos\theta$ ve $sin\theta$ cinsinden elde ediniz.

b) $cos(4\theta)$ ve $sin(4\theta)$'yı $cos\theta$ ve $sin\theta$ cinsinden elde ediniz.

c) $cos(n\theta)$ ve $sin(n\theta)$'yı $cos(\theta)$ ve $sin(\theta)$ cinsinden elde ediniz.

ç) $cos(n\theta)$ ve $sin(n\theta)$'yı $cos(\theta/2)$ ve $sin(\theta/2)$ cinsinden elde ediniz.

Tanım 1.7. $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ kompleks saysının bir $w \in \mathbb{C}$ kompleks kuvveti z^w şeklinde gösterilir. Bu bölümde $n := w \in \mathbb{Z}$ şeklindeki herhangi bir tamsayı olması durumu esas alınacak ve $w \in \mathbb{C}$ şeklindeki herhangi bir kompleks sayı olması oldukça kapsamlı bilgi içereceğinden dolayı ileriki bölümlerde ele alınacaktır.

Doğal tamsayılar için $z^0 = 1$, $z^1 = z$, $z^2 = z \cdot z$, $\cdots$ ve her $n = 1, 2, 3, \cdots$ için de $z^n = z^{n-1} \cdot z$ olduğu da kolayca görülebilir.

Negatif tamsayılar için de z^n, z'nin tersi olan z^{-1} kompleks sayısı cinsinden $z^n = (z^{-1})^{-n}$ şeklinde olacaktır.

Bildiğimiz üzere n. dereceden (kuvvetten) bir denklemin n tane kökü (çözümü) vardır. Tabii ki bize verilen her n. derecen denklemin köklerini (çözümlerini) bulmak (belirlemek) kolay bir iş değildir. Sadece bazı özel türler veya bazı kısıtlamalar altındaki denklemler için köklerin belirlenmesi mümkün olabilmektedir. Bu belirlemelerde, yani kompleks denklemlerinin köklerinin bulunmasında

$$z^n = re^{i(\theta+2k\pi)} \quad (\theta \in \mathbb{R}\ ,\ k \in \mathbb{Z})$$

şeklindeki bilindik eşitlik oldukça önemli rol oynar.

Şimdi, durumu kompleks değişken içeren, yani bilinmeyeni z olan ve her $i = 0, 1, 2, \cdots$

için w_i'ler de kompleks sayılar olmak üzere

$$p(z) = w_n z^n + w_{n-1} z^{n-1} + \cdots + w_3 z^3 + w_2 z^2 + w_1 z + w_0 = 0 \big(w_n \neq 0 \big)$$

şeklindeki denklemler n. dereceden bir kompleks bilinmeyenli denklem adını alır. Bu tür denklemlerin n tane kökükünün (çözümünün) olduğunu bilmemize rağmen genel anlamda ilgili köklerin bulunması oldukça zordur. Fakat, bu denklemin özel halleri olan

$$w_n z^n + w_0 = 0 \quad \big(w_n \neq 0 \big)$$

veya buna denk olan

$$z^n = \alpha \quad \big(\alpha := -\tfrac{w_0}{w_n} \big)$$

şeklindeki n. dereceden bir kompleks denklemin köklerini belirlemek durumundayız. Bunun için, ilgili denklemin, yani çözüm olarak aranan $z = z_k$'ların modül ve argümanlarını belirlememiz yeterli olacaktır. Bunun için,

$$z^n = \alpha \;\Rightarrow\; |z^n| = |\alpha| \;\Rightarrow\; |z|^n = |\alpha| \;\Rightarrow\; |z| = |\alpha|^{1/n}$$

gerektirmelerini aranan z'ler için modül ve

$$z^n = \alpha \;\Rightarrow\; (e^{i\theta})^n = e^{iarg(\alpha)} \;\Rightarrow\; e^{in\theta} = e^{i[Arg(\alpha)+2k\pi]}$$
$$\Rightarrow\; n\theta = Arg(\alpha) + 2k\pi \Rightarrow\; \theta = \tfrac{Arg(\alpha)+2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

gerektirmeleri için de argümanları belirlemiş oluruz. Bu veriler, aranan $z = z_k$ kökler için göz önüne alınırsa,

$$z = z_k = |z| e^{iarg(z)} = |\alpha|^{1/n} e^{iarg(\alpha)/n} = |\alpha|^{1/n} e^{i[Arg(\alpha)+2k\pi]/n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

olacaktır.

Durumu bir örnekle netleştirelim.

Örnek 1.7.

a) $z^2 = -4i$ şeklindeki 2. dereceden kompleks denkleminin iki kökünü de belirleyelim.

Burada $\alpha = -4i$ olup, $|\alpha| = |-4i| = 4$ ve $arg(\alpha) = arg(-4i) = -\pi/2 + 2k\pi$ dır. Buna göre, aranan kökler (çözümler) $z = z_k = 4^{1/2} e^{i(-\pi/2+2k\pi)/2}$ şeklinde olacaktır. Bunlar da;

$$k = 0 \text{ için } z_0 = 4^{1/2} e^{i(-\pi/2)/2} = 2e^{-i\pi/4} = 2[cos(-\pi/4) + isin(-\pi/4)]$$
$$= 2[cos(\pi/4) - isin(\pi/4)] = 2(1/\sqrt{2} - i1/\sqrt{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

ve

$$k = 1 \text{ için } z_1 = 4^{1/2} e^{i(-\pi/2+2\pi)/2} = 2e^{-i3\pi/4} = 2[cos(-3\pi/4) + isin(-3\pi/4)]$$
$$= 2[cos(3\pi/4) - isin(3\pi/4)] = 2(-1/\sqrt{2} - i1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

olarak bulunur. (Bu kökleri bir de sıralı ikililerden ve ilgili aksiyomlardan yararlanarak sizler bulunuz.)

b) $z^3 = 8i$ şeklindeki 3. dereceden kompleks denkleminin iki kökünü de belirleyelim.

Burada $\alpha = 8i$ olup, $|\alpha| = |8i| = 8$ ve $arg(\alpha) = arg(8i) = \pi/2 + 2k\pi$ dır. Buna göre, aranan kökler (çözümler) $z = z_k = 8^1/3e^{i(\pi/2+2k\pi)/3}$ şeklinde olacaktır. Bunlar da;

$$
\begin{aligned}
k = 0 \text{ için } z_0 &= 8^{1/3}e^{i(\pi/2)/3} = 2e^{i\pi/3} = 2[cos(\pi/6) + isin(-\pi/6)] \\
&= 2[cos(\pi/6) + isin(\pi/6)] = 2(\sqrt{3}/2 + i1/2) = \sqrt{3} + i, \\
k = 1 \text{ için } z_1 &= 8^{1/3}e^{i(\pi/2+2\pi)/3} = 2e^{i5\pi/6} = 2[cos(5\pi/6) + isin(5\pi/6)] \\
&= 2[cos(\pi/6) + isin(\pi/6)] = 2(-\sqrt{3}/2 + i1/2) = -\sqrt{3} + i
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
k = 2 \text{ için } z_2 &= 8^{1/3}e^{i(\pi/2+4\pi)/3} = 2e^{i7\pi/6} = 2[cos(3\pi/2) + isin(3\pi/2)] = -2i \\
&= 2[cos(3\pi/4) - isin(3\pi/4)] = 2(-1/\sqrt{2} - i1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

olarak buluruz.

Şu ana kadar, $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere hep $z^n = w_0$ $(w_0 \in C - \{0\})$ şeklindeki kompleks denklemlerin köklerinden bahsettik. Elbette ki, ilgili n sayısı bir negatif tamsayı da olabilir. Böylesi bir durumda, $n = -m$ ilişkisi gereği ilgili kompleks denklem yine $z^n = z^{-m} = w_0$ $(w_0 \in C - \{0\})$ kompleks denklemine denk olan $z^m = 1/w_0 = \hat{w}_0$ $(w_0 \in C - \{0\})$ şeklinde denklem elde edilir. Bu gibi denklemler için de yine kök araştırması belirttiğimiz gibi olcağı açıktır.

Rasyonel kuvvete sahip kompleks denklemlerin çözümü konumunda olabilecek aşağıdaki gibi verilen kompleks sayıların tüm değerlerini belirlemek yeterli olcaktır. Bunun için, aralarında asal olan $n, m \in \mathbb{N}^+$ doğal sayıları için bize verilen sıfırdan farklı herhangi bir w_0 kompleks sayısının,

$$w_0^{n/m} = \left(w_0^{1/m}\right)^n$$

şeklindeki durumunu ele alalım. Eğer $w = w_0^{1/m}$ ilişkisi göz önüne alınırsa, kolayca $w^m = w_0$ ilişkisi elde edilir. Burada üstteki bilgiler kullanıldığında, her $k = 0, 1, 2, \cdots, m-1$

$$
\begin{aligned}
w^m = w_0 \;\Rightarrow\; w = w_k &= |w_0|^{1/m}e^{i[\frac{Arg(w_0)+2k\pi}{m}]} \\
&= \sqrt[m]{|w_0|}\Big[cos\big(\tfrac{Arg(w_0)+2k\pi}{m}\big) + isin\big(\tfrac{Arg(w_0)+2k\pi}{m}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

şeklindeki $m-$tane kökün olduğunu bilmekteyiz. Dolayısıyla, istenen

$$(w^m)^n = (w_0)^n = \Big\{\sqrt[m]{|w_0|}\Big[cos\big(\tfrac{Arg(w_0)+2k\pi}{m}\big) + isin\big(\tfrac{Arg(w_0)+2k\pi}{m}\big)\Big]\Big\}^n$$

$m-$tane kompleks sayıları elde edilir.

Durumu daha da somut bir örnekle ele alalım. Bunun için de $(-1)^{2/3}$ kompleks sayısının ele alalım.

$$(-1)^{2/3} = [(-1)^{1/3}]^2$$

olduğuna göre, eğer $w = (-1)^{1/3}$ denilirse,

$$w^3 = -1 \;\Rightarrow\; w = w_k = |-1|^{1/3} e^{i\left(\frac{Arg(-1)+2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)} \quad (k = 0, 1, 2)$$

elde edilir. Burada;

$$k = 0 \;\Rightarrow\; w_0 = e^{i(\pi/3)} = cos\big(\pi/3\big) + isin\big(\pi/3\big) = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; w_0 = e^{i\pi} = cos(\pi) + isin(\pi) = -1 + i0 = -1$$

ve

$$k = 2 \;\Rightarrow\; w_0 = e^{i(5\pi/3)} = cos\big(5\pi/3\big) + isin\big(5\pi/3\big) = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

elde ederiz ki, dolayısıyla

$$(-1)^{1/3} = \left\{\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -1, \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

ve

$$\left[(-1)^{1/3}\right]^2 = (-1)^{2/3} = \left\{\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, (-1)^2, \left(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$

sonuçlarını elde ederiz.

Alıştırmalar 1.5.

(i) Aşağıda verilen kompleks sayıların tüm değerlerini bulunuz.

$\sqrt{-2}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt{1-i}$, $\sqrt[3]{1+i}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[5]{-i}$, $(-1)^{3/2}$, $(-i)^{3/5}$, $(1+i)^{2/5}$, $1+i\sqrt{3}$

(ii) Aşağıda verilen kompleks denklemlerin çözümlerini bulunuz.

$z^2 - 3z - i = 0$, $z^2 - iz - 1 + i = 0$, $z^2 - 3iz - 2i + 1 = 0$, $z^4 + 2z^2 - 3i = 0$,
$z^2 - 3z - 2i = 0$, $z^2 - 1 = 0$ $z^3 - 3iz = 0$, $(2-i)(z-i)^3 - (1+i)(z-i)^2 = 0$,
$z^4 - iz^2 - 1 - i = 0$, $z^5 - 4iz = 0$, $3iz^4 - i = 1$, $(z^5 - 1)(z^2 + i)(z^3 - 2i) = 0$