100
100

25 Ekim 2017

**MATEMATİK BÖLÜMÜ**
**MAT 207 Reel Analize Giriş**
**II. KSS (Kısa Süreli Sınav)**

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza :

**Soru:** $\left(1-\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_1$ reel sayı dizisinin limitini önce belirleyiniz, sonra da doğruluğunu $N-\epsilon$ ilişkisiyle görünüz. (100 p.)

**Çözüm:** Önce limitini belirleyelim.

$$x_n = 1-\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} 1-\frac{(-1)^{2n}}{2n+1} & \text{eğer } n:=2n \text{ ise} \\ 1-\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1+1} & \text{eğer } n:=2n-1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-\frac{1}{2n+1} \longrightarrow 1-0=1 \\ 1+\frac{1}{2n} \longrightarrow 1+0=1 \end{cases}$$

oldukları açıktır. O halde; $x_n = 1-\frac{(-1)^n}{n+1} \to x_0 = 1$ olduğunu $N-\varepsilon$ ilişkisiyle ispatlamamız isteniyor. Bunun için de, $\forall \varepsilon>0$ sayısı verildiğinde öyle (en az) bir $N:=N(\varepsilon)$ doğal sayısını bulmalıyız ki $\forall n \geq N$ için $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olsun.

$\varepsilon>0$ keyfi sayısı verilsin. O zaman,

$$|x_n - x_0| = \left|\left(1-\frac{(-1)^n}{n+1}\right)-1\right| = \left|-\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{|(-1)^{n+1}|}{|n+1|} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

olur, eğer $N:=N(\varepsilon) = [\![\frac{1}{\varepsilon}-1]\!]+1$ seçilirse.

(Çünkü, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < N = N(\varepsilon) < n$ dır.) !

O halde, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq N := N(\varepsilon) = 1 + [\![1/\varepsilon - 1]\!] = [\![1/\varepsilon]\!]$ için

$|x_n - x_0| < \varepsilon$ daima doğrudur. ($\varepsilon>0$ sayısının



keyfiği de bizi $|x_n - x_0| \to 0 \Leftrightarrow x_n - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x_0$'a götürür.)