100

100

21 / 12 / 2016

MAT 301 - Kompleks Analiz / V. KSS
(Matematik Bölümü I. & II. Öğretim Programları)

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza :

Soru: $z_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{n-1}{2n+3}$ kompleks sayı dizisinin bir (kompleks) Cauchy dizi olduğunu gösteriniz. (100 p.)

Çözüm: Verilenin Cauchy dizisi olduğunu göstermenin birden fazla yolu vardır. Esas tanımına göre hareket ederek isterenin gösterilmesini sizlere ödev olarak (☹) bırakıp, Cauchy dizilerinin yakınsak olduklarını göz önüne alarak istereni göstermek istiyoruz. Yani,

"(z_n) bir komlex Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ (z_n) bir komplex yakınsak dizidir"

önermesini kullanmak istiyorum. Bunun içinde, verilen komplex dizinin:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1} + i\frac{n-1}{2n+3}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} + i\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+3}$$

$$= 1 + i/2 = z_0$$

yakınsadığını göstermek istiyorum. Buna göre, $\forall\,\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısını bulmalıyız ki $n\geq N$ koşulunu sağlayan her $n\geq N$ için

$$|z_n - z_0| = \left|\frac{n}{n+1} + i\frac{n-1}{2n+3} - \left(1+\frac{i}{2}\right)\right| < \varepsilon \text{ olsun.}$$

$\varepsilon>0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$\left|\frac{n}{n+1} + i\frac{n-1}{2n+3} - \left(1+\frac{i}{2}\right)\right| = \dots$$

$$= \left| -\frac{1}{n+1} + i \frac{-5}{2(2n+3)} \right|$$

$$\le \left| \frac{-1}{n+1} \right| + \left| i \cdot \frac{-5}{2(2n+3)} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{5}{2(2n+3)} \quad \Leftarrow \left(\forall n \geq 1 \text{ için } n+1 \leq 2n+3 \Rightarrow \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\le \frac{1}{n+1} + \frac{5}{2(n+1)}$$

$$= \frac{7}{2(n+1)} < \varepsilon, \quad \text{eğer} \left(\frac{7}{2(n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{2\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{7}{2\varepsilon} - 1 < n \right)$$

$N := N(\varepsilon) = [\![7/2\varepsilon - 1]\!] + 1$ seçilirse.

O halde, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq N = N(\varepsilon) = 1 + [\![\frac{7}{2\varepsilon} - 1]\!]$ için

$$\left| \frac{n}{n+1} + i \frac{n-1}{2n+3} - \left(1 + \frac{i}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

daima doğru olur. $\varepsilon > 0$ sayısının keyfiliği bizi

$$z_n = \frac{n}{n+1} + i \frac{n-1}{2n+3} \to 1 + \frac{i}{2}$$ ya götürür.

O halde, (z_n) k.s. dizisi yakınsaktır $\Rightarrow$
(z_n) k.s. dizisi bir k. Cauchy dizisi olur.