$\frac{100}{100}$ AB

— KISMEN ÇÖZÜMLER —

24 Mayıs 2017 / Uluyazı Kampüsü

MAT 312 Fourier Analiz I
FİNAL SORULARI

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza : AB

Aşağıda verilen iki soru zorunlu sorular olup, sorularda istenenleri gerçekleştiriniz.

Soru 1) [25 p.] $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 2x & , & -2<x<0 \text{ ise} \\ -3x & , & 0<x\leq 1 \text{ ise} \\ -3 & , & 1<x<2 \text{ ise} \\ -1 & , & 2<x\leq 4 \text{ ise} \end{array}\right\}$ fonksiyonunun tüm kritik noktalarını araştırınız ve türlerini belirleyiniz.

Soru 2) [25 p.] $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & , & -1<x<0 \text{ ise} \\ x & , & 0\leq x\leq 1 \text{ ise} \\ -1 & , & 1<x<2 \text{ ise} \\ -x & , & 2<x\leq 3 \text{ ise} \end{array}\right\}$ fonksiyonuna karşılık gelen $y=f_d(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

– – – – o – – – –

Aşağıda verilen iki sorudan *sadece birini* seçiniz ve seçtiğiniz sorudaki istenenleri gerçekleştiriniz.

Soru 3) [50 p.] $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 1 & , & -2<x<-1 \text{ ise} \\ -1 & , & -1<x<0 \text{ ise} \\ x & , & 0<x<1 \text{ ise} \\ -1 & , & 1<x\leq 3 \text{ ise} \end{array}\right\}$ fonksiyonunun $(-2,3)$ aralığındaki Fourier serisini bulunuz ve $f(-1)$'e karşılık gelen seriyi belirleyiniz.

Soru 4) [50 p.] $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & , & -\pi<x\leq 0 \text{ ise} \\ x & , & 0<x<\pi \text{ ise} \end{array}\right\}$ fonksiyonunun $(-\pi,\pi)$ aralığındaki Fourier serisini bulunuz ve $f(\pi)$'ye karşılık gelen seriyi belirleyiniz.

Soru 5) [50 p.] $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x & , & -2<x\leq 0 \text{ ise} \\ 2 & , & 0<x<2 \text{ ise} \end{array}\right\}$ fonksiyonunun $(-2,2)$ aralığındaki Fourier serisini bulunuz ve $f(0)$'a karşılık gelen seriyi belirleyiniz.

– – – – o – – – –

Başarılar . . .

☺

Ders ve Sınav Sorumlusu : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK, ÇKÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Çankırı.

Çözüm 1) $x_0=-2$, $x_0=4$ noktalarının birer uç noktalar oldukları açıktır. Dolayısıyla ilgili noktalar birer kritik noktalar olamaz. Ama $x_0=0$, $x_0=1$ ve $x_0=2$ noktaları birer K.N. adaylarıdır. (Neden?) Bakalım gerçekten mi?

(i) $\underline{x_0=0}$ için $f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-3x)=0<\infty$,

ve

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x)=0<\infty$$

olup $f(0^+)=f(0^-)$ olup bir sürekli olmayan noktadır. Çünkü $f(0)$ mevcut değildir.

(ii) $\underline{x_0=1}$ için $f(1^+)=\dots=-3<\infty$

ve

$$f(1^-)=\dots=-3<\infty$$

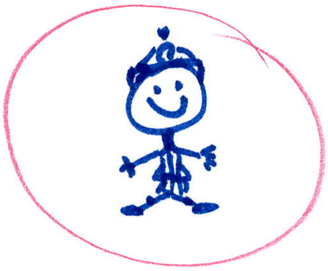
olup yine $f(1^+)=f(1^-)=f(1)$ ilişkisi gereği bir Sürekli Noktadır.

(iii) $\underline{x_0=2}$ için $f(2^+)=\dots=-1<\infty$

ve

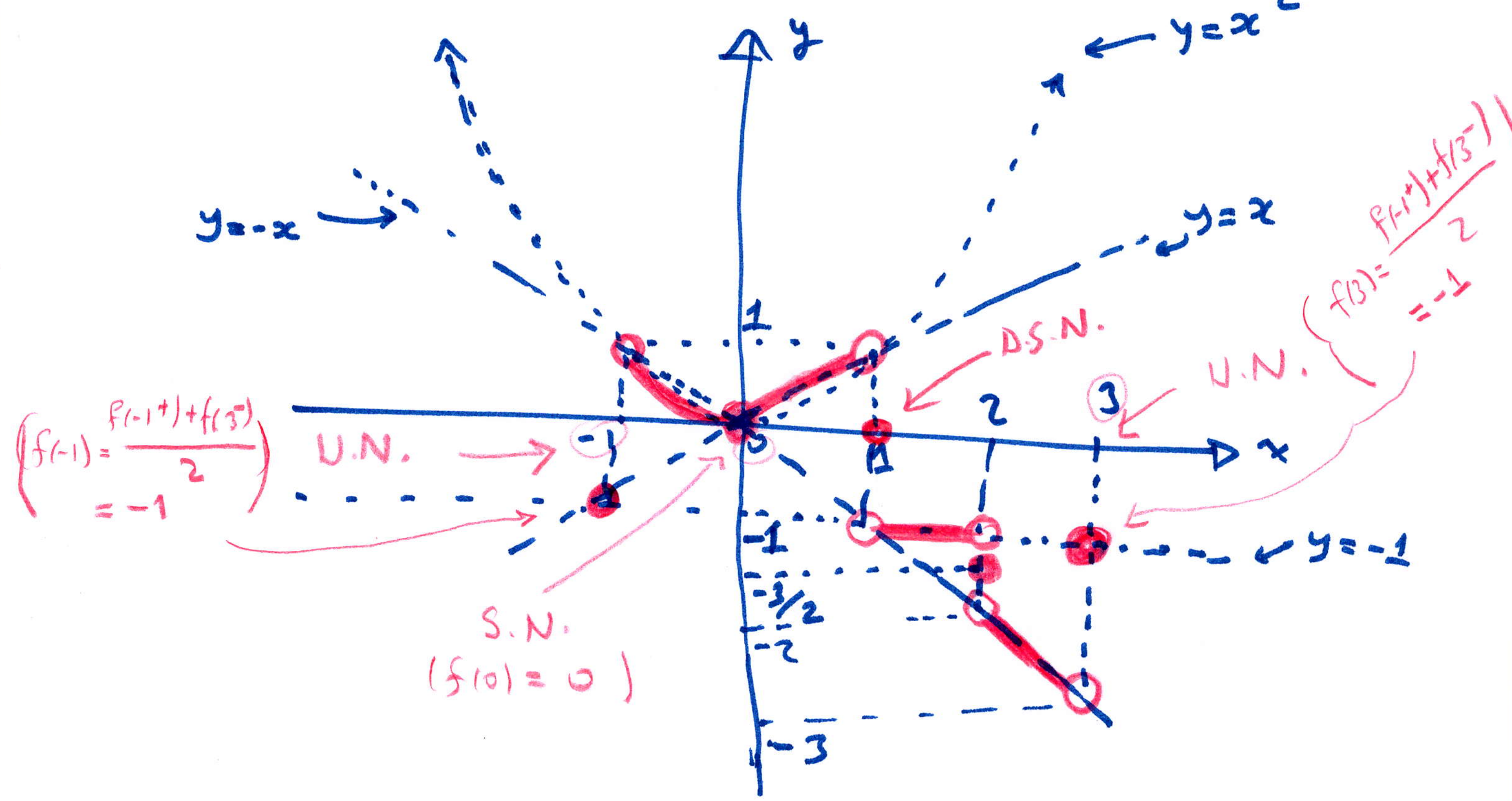
$$f(2^-)=\dots=-3<\infty$$

olup $f(2^+)\neq f(2^-)$ olduğundan $x_0=2$ K.N.'sı bir Düzgün Süreksiz Noktadır.



Çözüm 2)

$f(x)=f_d(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Çünkü;

#1. $x_0=0$ noktası bir <u>sürekli noktadır</u>. Çünkü $f(0^+)=0$, $f(0^-)=0$,
$f(0)=0$ dır. Yani $f(0^+)=f(0^-)=f(0)=0$ olur.
Doğal olarak, $f(0)=f_d(0)=0$ dır.

#2. $x_0=1$ noktası bir K.N. noktasıdır ve bu da <u>D.S. Noktadır</u>.
Çünkü $f(1^+)=-1<\infty$, $f(1^-)=1<\infty$ olup $f(1^+)\neq f(1^-)$ dır.
Doğal olarak, $f(1)=0$'dır. $\left(f(1)=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0\right)$

#3. $x_0=2$ noktası yine bir K.N. konumundadır ve bu da bir D.S.N. dır. Çünkü, $f(2^+)=-2\neq f(2^-)=-1$ dır.
Doğal olarak, $f(2)=-\frac{3}{2}$ dır. $\left(f(2)=\frac{f(2^-)+f(2^+)}{2}=\frac{-3}{2}\right)$

#4. $\left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)=f(3)=\frac{f(-1^+)+f(3^-)}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=-1$ dır.
U.N. için

Çözüm 5) $I=(-2,2)$ şeklinde simetrik bir genel aralıkta verilen fonksiyonun F.S. serisi istenmektedir. Bu serinin, bildiğimiz gibi $L=2$ ($T=2L=4$ periyotlu) olup ve

$$f(x) = (f_d(x) =) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right\}$$

şeklindeki seridir. Ve bu serinin malum katsayıları da;

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{0} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} 2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right)$$

$$= \ldots \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

ve

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{0} x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_{0}^{2} 2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right)$$

$$= \ldots \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

şeklinde belirlenecektir. Ellerinizden öper ...