100/100

KISMEN ÇÖZÜMLER

22 Mayıs 2017 / Uluyazı Kampüsü

MAT 403 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi I

FİNAL SORULARI

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

Aşağıda verilen iki soru zorunlu sorular olup, sorulardaki talimatlara göre istenenleri yapınız.

Soru 1) [30 p.] Aşağıda verilenlerden *sadece birini seçiniz* ve gereken araştımayı *kompleks sayı dizlerini kullanarak* yapınınız ve istenen için bu araştırmanın doğruluğunu görünüz;

(a) $z = x + iy$ olmak üzere, $f(z) = x^2 + ixy$ kompleks fonksiyonun $z_0 = i$ noktasındaki limitini,

(b) $f(z) = \frac{z}{z+i}$ kompleks fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasındaki sürekliliğini,

(c) $f(z) = \frac{i}{z+i}$ kompleks fonksiyonunun $z_0 = i$ noktasındaki türevini.

Soru 2) [20 p.] Bir $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu verilsin. Bu durumda, aşağıda verilenlerden *sadece birini seçiniz* ve gerekeni (isteneni) yapınız.

(a) f kompleks fonksiyonu $\mathcal{A}$'da analitik bir fonksiyon ise $|f|$ fonksiyonu da $\mathcal{A}$'da analitik olur mu? Neden? Araştırınız.

(b) f kompleks fonksiyonu bir $z_0 \in \mathcal{A}$ noktasında Cauchy Riemann şartlarını sağlıyor ise anlitik olur mu? Neden? Araştırınız. Farklı iki örnek veriniz.

Aşağıda verilen iki sorudan *sadece birini* seçiniz ve seçtiğiniz sorudaki talimatlara göre istenenleri yapınız.

Soru 3) $f(z) = e^{iz}$ kompleks fonksiyonunu göz önüne alarak, aşağıda istenenleri gerçekleştiriniz.

a) Analitik olduğu bir küme (Esas Bölge) belirleyiniz ve ilgili kümeyi ilgili uzayda çiziniz. [10 p. + 10 p.]

b) $f(z) = -i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz. [10 p.]

c) $\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < Arg(iz) \leq \pi\}$ kümesini hangi kümeye dönüştürür? Belirleyiniz ve iki kümeyi de ilgili uzaylarda çiziniz. [10 p. + 10 p.]

Soru 4) $f(z) = ln(iz)$ kompleks fonksiyonunu göz önüne alarak, aşağıdakilerden biri için isteneni gerçekleştiriniz.

a) Analitik olduğu bir küme (Esas Dal) belirleyiniz ve ilgili kümeyi ilgili uzayda çiziniz. [10 p. + 10 p.]

b) $f(z) = 3i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz. [10 p.]

c) Hangi kümeyi $\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\}$ kümesine dönüştürür? Belirleyiniz ve iki kümeyi de ilgili uzaylarda çiziniz. [10 p. + 10 p.]

Başarılar . . .

– oOo –

Ders ve Sınav Sorumlusu : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK, ÇKÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Çankırı.

Soru-1/(b) (b)'de istenen sürekliliğin önce kompleks sayı dizisi yardımıyla belirlenmesi ve (sürekli ise) ilgili önermenin doğruluğunun ispatlanması istenmektedir. $z_0=0$ olup ve buna yakınsayan $z_n=\frac{1}{n}$, $z_n=\frac{i}{n}$, $z_n=\frac{1}{n^2}$, $z_n=\frac{i}{n^2}$ ... şeklinde sonsuz tane komplex sayı dizisi vardır. Bizler $z_n=\frac{1}{n}$ komplex sayı dizisini ele alalım. Kolayca, $n\to\infty$ iken $z_n=\frac{1}{n}\to 0=z_0$ olduğuna göre

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty} f(1/n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/n+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{(1+in)/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+in}$$

$$(= \dots\dots)$$

$=0=f(0)$ olduğu elde edilir.

Tabii ki bu önerme "$\forall (z_n)\ni z_n\to z_0=0$" için doğru olmak zorundadır. Bunu da belirlemek zor/mümkün olmadığına göre,

$$\lim_{z\to z_0=0} f(z)=\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{z}{z+i} = f(z_0)=f(0)=\frac{0}{0+i}=0}$$

olduğunu görmek zorundayız. Bunun için de $\varepsilon-\delta$ ilişkisine girmek zorundayız. (Neden?)

$\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Bu durumda, $\exists$ $\delta>0$ sayısını bulmalıyız ki

$$\forall z\in\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|=|z-0|=|z|<\delta \ (\delta>0)\}$$

için

$$\left|f(z)-f(z_0)\right|=\left|\frac{z}{z+i}-0\right|$$

$$=\left|\frac{z}{z+i}\right|<\varepsilon$$

olsun. Araştıralım!

$$\left|\frac{z}{z+i}\right|=\frac{|z|}{|z+i|}\leq\frac{\delta}{|z+i|}\leq\frac{\delta}{||z|-|i||}$$

$$=\frac{\delta}{1-|z|} \qquad (0<|z|<\delta<1)$$

$$\qquad\qquad \left(\begin{array}{l}|z|<\delta \Leftrightarrow -|z|>-\delta\\ \Leftrightarrow 1-|z|>1-\delta\end{array}\right)$$

$$\leq\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon \qquad \left(\Leftrightarrow \frac{1}{1-|z|}<\frac{1}{1-\delta}\right)$$

olur, eğer $\left(\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon \Leftrightarrow \delta<\varepsilon-\delta\varepsilon \Leftrightarrow \delta(1+\varepsilon)<\varepsilon \Leftrightarrow \delta<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$

$\delta:=\min\left\{\varepsilon,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ seçilirse.

O halde, $\forall\varepsilon>0$ keyfi sayısı ve

$\forall z\in\left\{z\in\mathbb{C}: |z|<\delta:=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$ sayısı için

$$\left| f(z) - f(z_1) \right| = \left| \frac{z}{z+i} - 0 \right|$$

$$= \ldots\ldots$$

$$< \varepsilon$$

eşitsizliği <u>daima</u> doğru olur. $\varepsilon > 0$ sayısının keyfiliği bizi

$$\frac{z}{z+i} - 0 \to 0 \equiv \lim_{z \to 0} \frac{z}{z+i} = 0 \quad (= f(0))$$

ilişkisine götürür.

O halde, $f(z) = \frac{z}{z+i}$ kompleks fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında süreklidir.

—o—

Diğerleri ödev ☹

Çünkü, çalışmıyorsunuz!

Kolaylıklar dilerim.

H.I.