

MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT 111 Temel Matematığe Giriş

ÖDEV ve Bir ÖRNEK ÇÖZÜM

Soru: Her $x \in \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| < 4\}$ ve her $y \in \{y \in \mathbb{R} : 3 < |y| < 5\}$ için,

a) $\left| \frac{x+y}{3y-2x} - 1 \right| < \kappa$ b) $\left| \frac{y}{y+x} + \frac{1}{2} \right| > \kappa$ c) $\left| \frac{x-y}{y-x} - \frac{2}{3} \right| < \kappa$ d) $\left| \frac{y-x}{y+x} - 1 \right| > \kappa$ e) $\left| \frac{x-2y}{y-3x} - \frac{3}{2} \right| < \kappa$

olacak şekilde birer $\kappa > 0$ sayının var olup olmadığını araştırınız. Varsa, bulunuz.

ÇÖZÜM : a)

Öncelikli olarak istenen eşitsizlikteki bazı temel işlemleri yapmak durumundayız:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{3y-2x} - 1 \right| &= \left| \frac{x+y-(3y-2x)}{3y-2x} \right| = \left| \frac{3x-2y}{3y-2x} \right| = \frac{|3x-2y|}{|3y-2x|} \\ &\leq \frac{|3x| + |-2y|}{||3y|-|2x||} = \frac{3|x| + 2|y|}{|3|y| - 2|x|} = (3|x| + 2|y|) \cdot \left(\frac{1}{|3|y| - 2|x|} \right) \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Eđer,

$$3|x| + 2|y| \quad \text{ve} \quad \frac{1}{|3|y| - 2|x|}$$

ifedeleri için birer üst sınır belirlenirse, (*)'da istenen için de bir üs sınır, yani istenen $\kappa > 0$ sayısı da belirlenmiş olunur.

Araştıralım:

$$1 < |x| < 4 \Rightarrow 3 < 3|x| < 12 \quad \text{ve} \quad 3 < |y| < 5 \Rightarrow 6 < 2|y| < 10$$

olup bu iki eřitsizlikten kolayaca,

$$3 + 6 = 9 < 3|x| + 2|y| < 12 + 10 = 22$$

şeklindeki eşitsizlik ve doğal olarak da birinci eşitsizliğe ilişkin bir üst sınır elde edilir. Ayrıca,

$$1 < |x| < 4 \Rightarrow -8 < -2|x| < -2 \quad \text{ve} \quad 3 < |y| < 5 \Rightarrow 9 \leq 3|y| < 15$$

olup bu iki eřitsizlikten de kolayaca,

$$-8 + 9 = 1 < 3|x| - 2|y| < -2 + 15 = 13 \Rightarrow 1 < |3|x| - 2|y|| < 13 \Rightarrow \frac{1}{13} < \frac{1}{|3|x| - 2|y||} < 1$$

şeklindeki eşitsizlikler ve doğal olarak istenen ikinci eşitsizlik için bir üst sınır elde edilir. Bu belirlenen üst sınırlar (*)'daki eşitsizlik için göz önüne alınırsa,

$$\left| \frac{x+y}{3y-2x} - 1 \right| = \dots \leq \dots = (3|x| + 2|y|) \cdot \left(\frac{1}{|3|y| - 2|x|} \right) < \frac{1}{13} \cdot 1 = \frac{1}{13} =: \kappa$$

şeklindeki aranan bir üst sınır, yani $\kappa > 0$ sayısı belirlenmiş olunur.

ÖNEMLİ NOT

HAFTADA 3 güne OFİS saati koymama ve yaklaşık DÖNEMİN 2,5 AYI BİTMESİNE rağmen ne gelen var ne de giden. BARI DİğERLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN UğRAŞIN. Yoksa durumlar vahim.

Sağlıcakla kalın ...