100
100
KISMEN ÇÖZÜMLER

26 Mayıs 2017 / Uluyazı Kampüsü

MAT 222 Vektörel Analiz
FİNAL SORULARI

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 25 25 25 İmza :

Soru 1) [40 p.] Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve isteneni yapınız.

a) $\vec{f}=\vec{f}(t)$, $\vec{g}=\vec{g}(t) : \mathcal{H} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ $(n>2)$ fonksiyonları $\mathcal{H}$ kümesinde türevlenebilir ise, $(\vec{f} \bullet \vec{g})(t)$ fonksiyonu da $\mathcal{H}$ kümesinde türevlenebilirdir. İspatlayınız.

b) $\vec{f}=\vec{f}\,(t)$, $\vec{g}=\vec{g}\,(t) : \mathcal{H} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^3$ vektör değerli fonksiyonları türevlenbilir ise, $\frac{d}{dt}(\vec{f} \times \vec{g}) = \frac{d}{dt}(\vec{f}) \times \vec{g} + \vec{f} \times \frac{d}{dt}(\vec{g})$ olduğunu görünüz. (vizede sorulmuştu)

c) α, β reel skalarlar olmak üzere, $\vec{f}(t)$ ve $\vec{g}(t)$ vektör değerli fonksiyonları bir t_0 noktasında sürekli ise, $\alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t)$ vektör değerli fonksiyonu da t_0 noktasında sürekli olur. İspatlayınız. (vizede sorulmuştu)

d) $\alpha(t) : \mathcal{H} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ ve $\vec{f}(t) : \mathcal{H} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{II} \subset \mathbb{R}^n$ $(n>1)$ fonksiyonları bir $\mathcal{H}$ kümesinde türevlenebilir ise, $\alpha(t) \cdot \vec{f}(t)$ fonksiyonu da $\mathcal{H}$ kümesinde türevlenebilirdir. İspatlayınız.

– o –

Soru 2) [30 p.] Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve isteneni yapınız.

a) $\vec{f}=\vec{f}(t) = \langle 2t, t^2, t^2-t \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun $t_0=1$ noktasındaki türevinin $\langle 2, 2, 1 \rangle$ olduğunu $\epsilon-\delta$ ilişkisiyle ispatlayınız. (vizede sorulmuştu)

b) $\vec{f}=\vec{f}(t) = \langle 3t-1, t^2+t, 5t+1, -2 \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun $t_0=0$ noktasındaki limitini önce bulunuz ve sonra da doğruluğunu $\epsilon-\delta$ ilişkisiyle ispatlayınız.

c) $\vec{f}=\vec{f}\,(t) = \langle 2t, 3t-1, t^2, 4 \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun her $t \in \mathbb{R}$ için sürekli olduğunu ($\epsilon-\delta$ ilişkisiyle) ispatlayınız.

– o –

Soru 3) [30 p.] Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve isteneni yapınız.

a) $\vec{f}=\vec{f}(t,r,s) = \langle r+2t, s-t^2, r^2-st, -rst \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun bir (t_0, r_0, s_0) noktasındaki r – *bağımsız* değişkenine göre kısmi türevini, **türev tanımını** kullanarak bulunuz.

b) $\vec{f}=\vec{f}\,(t) = \langle t-2sint, t^2e^{-2t}, cos^2t \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun **diferansiyelini** bulunuz.

c) $\vec{f}=\vec{f}(x,y) = \langle \sqrt{x-y}, ln(x+y), \sqrt{x}-\sqrt{y} \rangle$ vektör değerli fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz ve ilgili kümeyi ilgili uzayda çiziniz.

d) Bir vektör değerli fonksiyonun verilen bir t_0 noktasında tanımlı olması sürekli olmasını gerektirir mi? Neden? Örneklendiriniz.

Başarılar . . .

– o☺o –

Çözüm 3 – c) $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ olduğu kolayca görülmektedir. Doğal olarak, $\vec{f}=\vec{f}(x,y)$ vektör değerli

(1)

fonksiyonu

$\vec{f} = \vec{f}(x,y) = \langle f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y) \rangle$ şeklindeki 2-bağımsız (x ve y) ve üç-bileşenden oluşan ve herbirinde birer x ve y bağımsız değişkenli ve reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca,

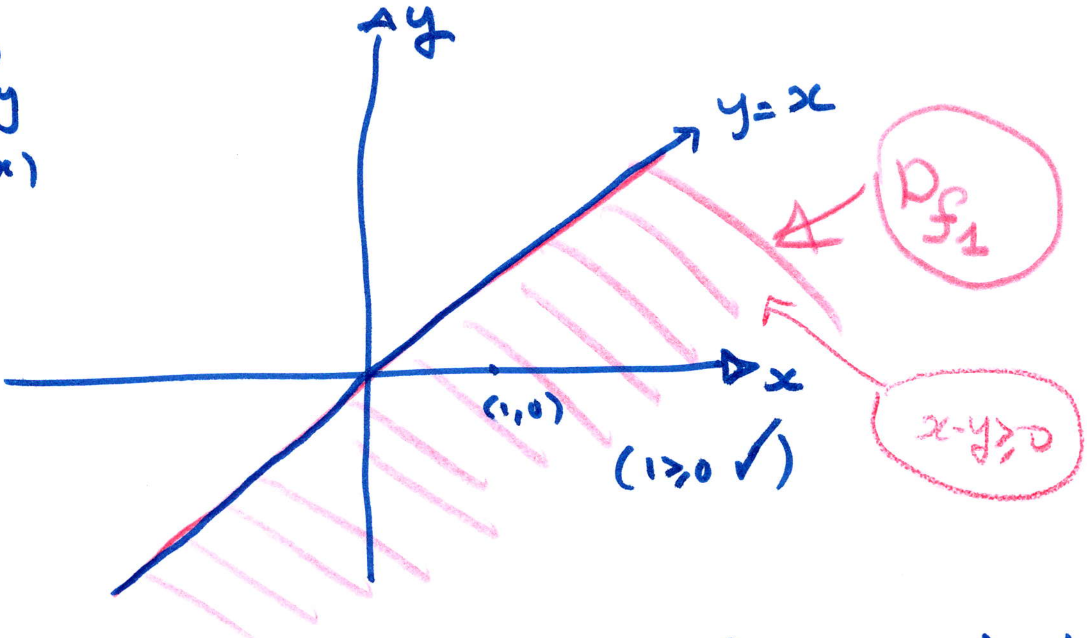
$$D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$$ olması gerektiğine göre;

$f_1(x,y) = \sqrt{x-y}$ fonksiyonunun $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \geq 0\}$ şeklindeki küme olup ve bu da

$x - y \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq y$

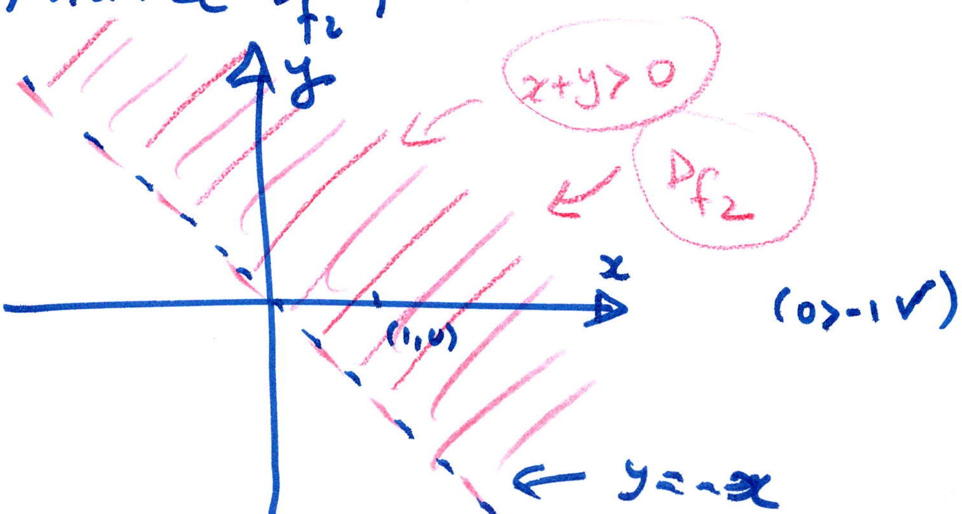
$(y = x)$



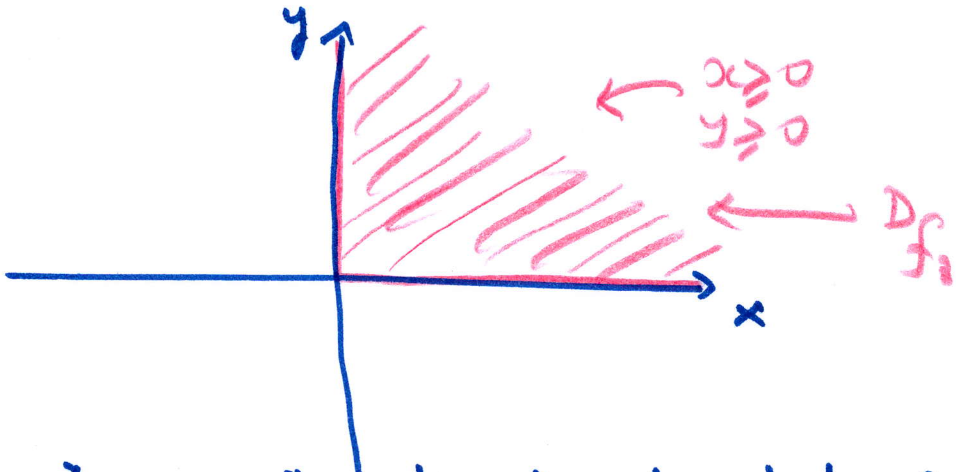
$f_2(x,y) = \ln(x+y)$ için de $D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$ olup ve bu da

$x + y > 0$

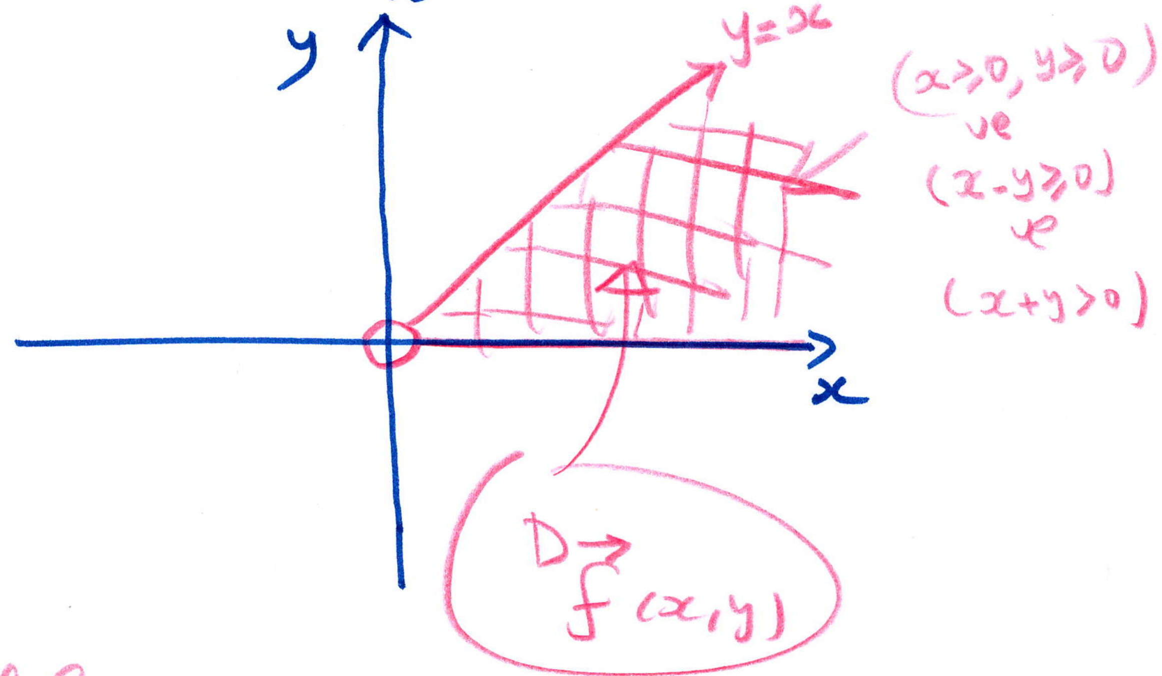
$\Leftrightarrow y > -x$



ve son olarak $f_3(x,y)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ nin D_{f_3} kümesi de
$D_{f_3}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0$ ve $y\geq 0\}$ olan küme olup
ve bu da ($\mathbb{R}^2$'de olduğuna lütfen dikkat!);



olur. D_{f_1}, D_{f_2} ve D_{f_3} kümelerinden kolayca



elde edilir. ☺

Soru 1-a) $\vec f(t), \vec g(t) : \mathcal{H}\subset\mathbb{R}\to I\subset\mathbb{R}^n$ $(n>1)$ vektör değerli fonksiyonları $\mathcal{H}$ kümesinde türevlenebilir fonksiyon demek $\forall t_0\in\mathcal{H}$ için $\vec f$ ve $\vec g$ fonksiyonlarının türevlenebilir olması demektir. Ve

$\vec{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t) \rangle$

ile

$\vec{g}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t) \rangle$ vektör değerli fonksiyonlarının $\forall t_0 \in \mathcal{H}$ için türevlenebilmesi demek $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $f_i(t)$ ve $g_i(t)$ fonksiyonlarının da (zorunlu olarak) $\forall t_0 \in \mathcal{H}$ için türevlenmesi demektir. Bu ise $\forall t_0 \in \mathcal{H}$ için $f_i(t) \cdot g_i(t)$ fonksiyonlarının her $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için türevlenmesini gerektirir. Bu ise $\forall t_0 \in \mathcal{H}$ için $\vec{f} \bullet \vec{g}$, yani

$$(\vec{f} \bullet \vec{g})(t) = \langle f_1(t) \cdot g_1(t), \ldots, f_n(t) \cdot g_n(t) \rangle$$

vektör değerli fonksiyonunun belirlediği t-parametreli/değişkenli ve reel değerli fonksiyonunun türevlenmesi demektir. ☺

Diğerleri Ödev

...