100/100

KISMEN GÖZÜMLER

30 Ekim 2017

MATEMATİK BÖLÜMÜ

MAT 405 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi

Vize Soruları

Adı Soyadı : Hüseyin IRMAK No.: 252525 İmza :

SADECE İKİ SORU SEÇİNİZ ve İSTENENİ YAPINIZ

Soru 1) Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve isteneni gerçekleştiriniz. (50 p.)

(a) γ kompleks eğrisi köşeleri $z=-1$, $z=4i$ ve $z=2-i$ noktalarında olan üçgenin çevresinin belirlediği pozitif yönlü bir eğri olduğuna göre, bu eğriyi oluşturunuz ve kompleks düzlemde çiziniz.

(b) γ kompleks eğrisi $\{z\in\mathbb{C}:|z|<4 \text{ ve } \Re e(z)\geq 0\}$ kümesinin negatif yönlü çevresi ise, bu eğriyi oluşturunuz ve kompleks düzlemde çiziniz.

Soru 2) Aşağıda verilenlerden sadece birini seçiniz ve verilen komplex integralin modülüne ilişkin bir üs sınır belirleyiniz. (50 p.)

(a) γ kompleks eğrisi köşeleri $z=i$ noktasını $z=4+2i$ noktasına bağlayan bir eğri ve $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}dz$.

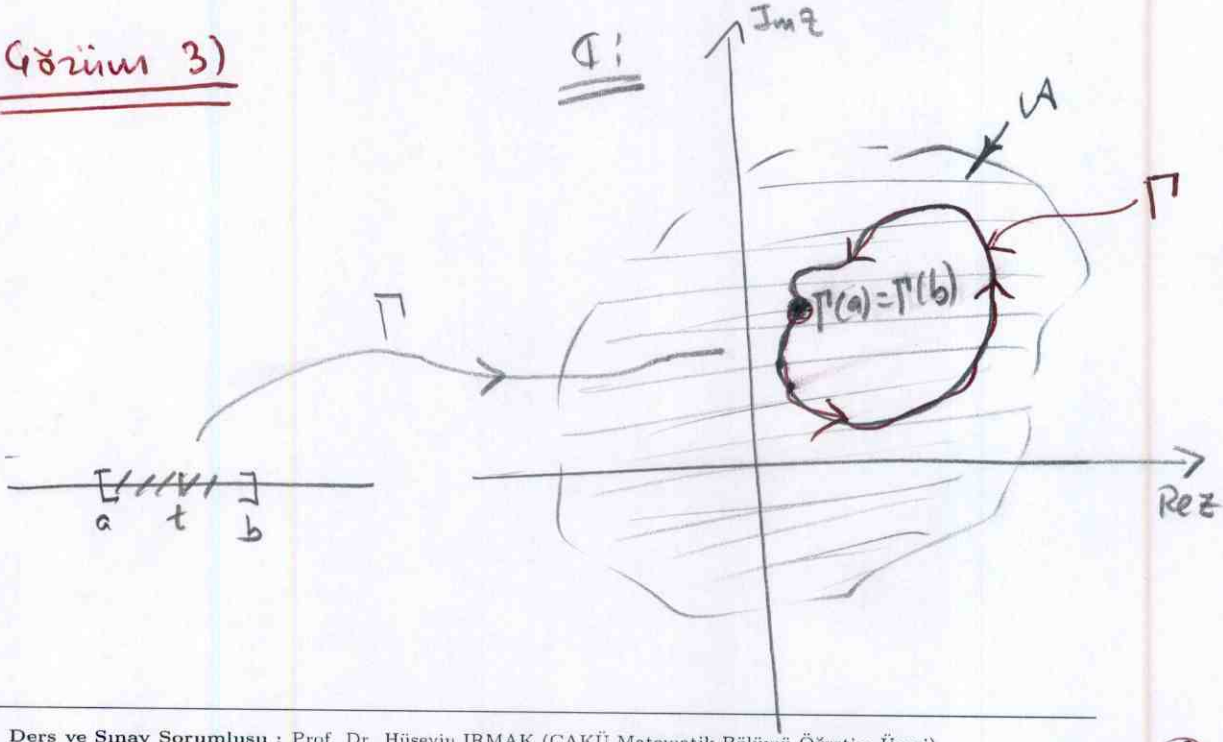
(b) γ kompleks eğrisi $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ kümesinin sınırının belirlediği çevre ve $\int_\gamma \frac{z}{z^2+4}dz$.

Soru 3) $\Gamma:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ basit kapalı (türevlenebilir) bir eğri, $\Gamma([a,b])\subset\mathcal{A}\subset\mathbb{C}$ ve $f(z)$ kompleks fonksiyonu da $\mathcal{A}$ bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\int_\gamma f(z)dz=0$ dır. Gösteriniz. Eğer ilgili eğri kendi kendini kesmeyen bir eğri olsaydı, ilgili integral için ne derdiniz? Detaylıca açıklayız. (50 p.)

ÇÖZÜMLER

Çözüm 3)

Q:



n

Γ ; $\Gamma(t) = x(t) + iy(t)$ kompleks eğrisi basit kapalı ve türevlenebilir ($[a,b]$ aralığında) olduğundan dolayı,

$$\int_{\Gamma} f(z) = \int_{t=a}^{t=b} \Gamma'(t)\, f(\Gamma(t))\, dt$$

$$\left(z = \Gamma(t) \Leftrightarrow dz = \Gamma'(t)\, dt \right)$$

$$= \int_{t=a}^{b} \frac{d}{dt} \left(\tilde{f}(\Gamma(t)) \right) dt$$

$$= \int_{a}^{b} d\left(\tilde{f}(\Gamma(t)) \right)$$

$$= \tilde{f}(\Gamma(t)) \Big|_{a}^{b}$$

$$= \tilde{f}(\Gamma(b)) - \tilde{f}(\Gamma(a))$$

$$\left(\Gamma(a) = \Gamma(b) \right)$$

$$= 0$$

elde edilir. ($\tilde{f}$, f nin ilkelidir !)

(!) Sizlerde, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklindeki A'da analitik olan fonksiyonun Cauchy-Riemann şartlarını sağladığını düşünerek, ilgili integralin yine 0 (sıfır) olduğunu da siz görün.

☺

Eğer, ilgili $\Gamma : \Gamma(t)$ eğrisi kendi kendini kesmeyen bir eğri olsaydı, üstteki çözümden kolayca

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma} \frac{d}{dt}\big(f(\Gamma(t))\big)\,dt$$

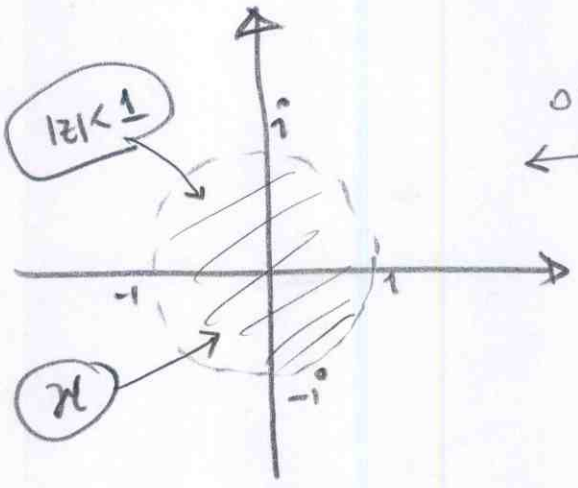
$$= f(\Gamma(t))\Big|_{t=a}^{b}$$

$$= f(\Gamma(b)) - f(\Gamma(a)) \in \mathbb{C}$$

şeklinde olacağı açıkça görülür.

(!!) Sizlerde, ilgili $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklindeki A'da analitik olan bir fonksiyonun CR-şartlarını düşünerek gerekli araştırmayı yapınız.

Soru - 2/(b) : Önce $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kümesini $\mathbb{C}$-düzleminde görüp, ilgili γ eğrisini düşünelim.



ilgili γ nın orijin merkezli ve $r=1$ br yarıçaplı bir daire olduğuna göre, $\gamma : \gamma(t) = 1 \cdot e^{it}$

$= \cos t + i \sin t$

$(0 \le t < 2\pi)$

şeklindeki kompleks eğri olur.

Yani, $\gamma = \partial(T) = e^{it}$ $(0 \le t < 2\pi)$ dir. $\forall z \in \gamma$ için $|z| = 1$ olduğu açıktır. O halde,

$$\left| \int_\gamma \frac{z}{z^2+4}\, dz \right| \le \int_\gamma \left| \frac{z}{z^2+4} \right| |dz|$$

$$= \int_\gamma \frac{|z|}{|z^2+4|} |dz| \le \int_\gamma \frac{|z|}{||z|^2-4|} |dz|$$

($|z| = 1$ olduğunu biliyoruz;
$\Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z|^2 - 4 = 1-4 = -3 \Rightarrow ||z|^2-4| = 3$)

($\Rightarrow \frac{1}{||z|^2-4|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|z|}{||z|^2-4|} = \frac{1}{3}$)

(ve $\int_\gamma |dz| = \ell(T) = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ dir.)

olup, bunlar üstteki eşitsizlikte göz önüne alınırsa;

$$\left| \int_\gamma \frac{z}{z^2+4}\, dz \right| \le \dots$$

$$\le \int_{t=0}^{2\pi} \frac{|z|}{||z|^2-4|} |dz| = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{3} |dz|$$

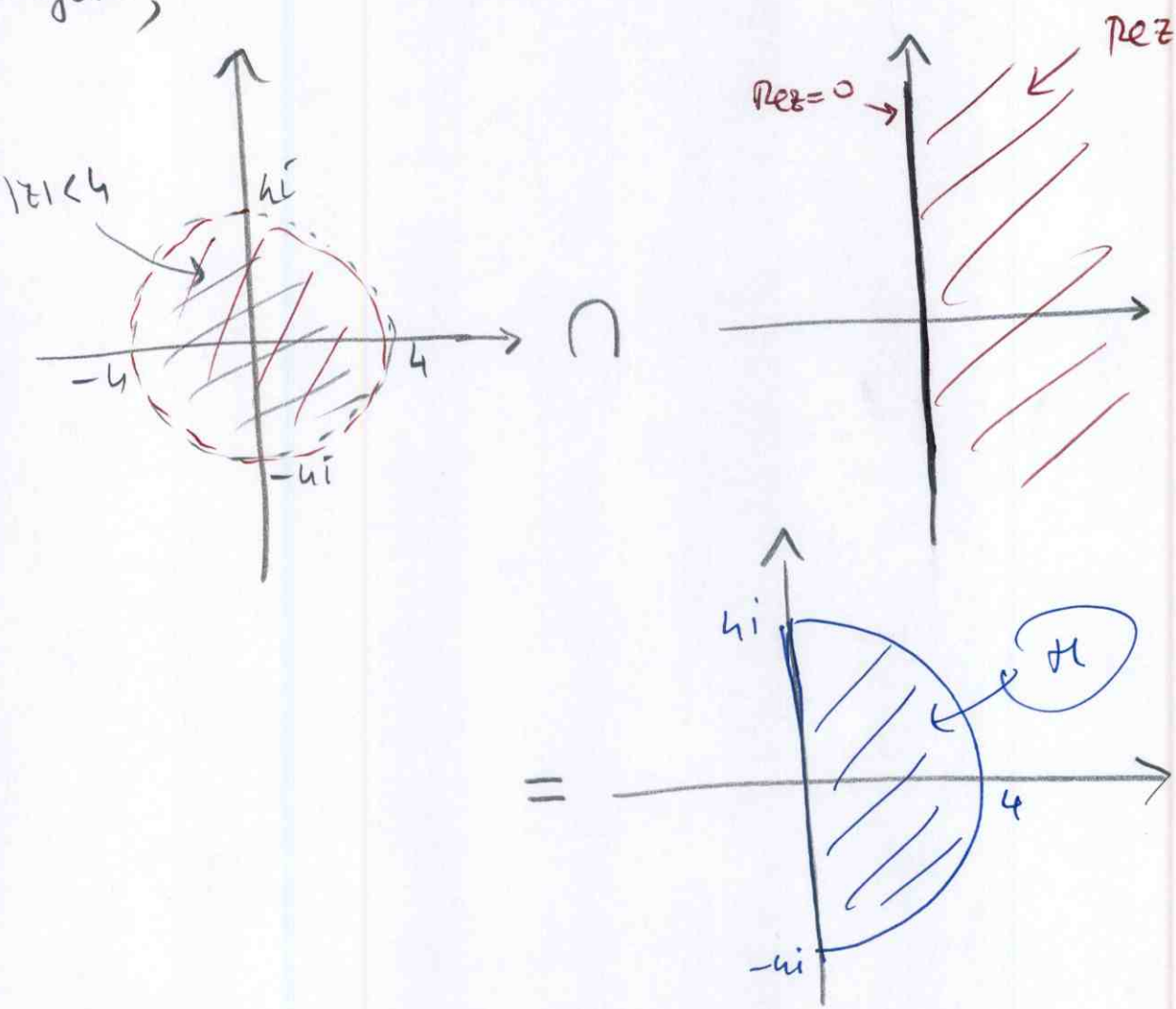
$$= \frac{1}{3} \int_{t=0}^{2\pi} |dz|$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

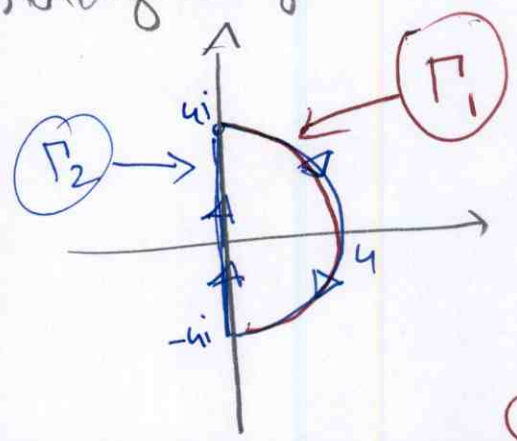
elde edilir. (Bu nedenle olur?)

Çözüm - 1 / (b): Önce $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<4 \text{ ve } \mathrm{Re}(z)\geq 0\}$ kümesini z-düzleminde görelim. Bu kümenin,

$\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<4\} \cap \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}z\geq 0\}$ olduğunu bildiğimize göre,



olup, ilgili γ kompleks eğrisi de $\partial(\mathcal{H})$ olması istendiğine göre,



olup, γ'da $\Gamma_1+\Gamma_2$ şeklindeki kompleks eğri olacaktır. Buna göre,

Γ_1: $z=4i$ noktasını $z=-4i$ noktasına bağlayan $r=4$'lük yarıçaplı (orijin merkezli) kompleks eğrinin negatif (saat yönüyle aynı yönde olan) yönlü eğri olmalıdır.

Kolaycası, aşağıdaki kompleks eğriyi düşünürsek, yani

$\tilde{\Gamma}$: $\tilde{\Gamma}(t) = 1 \cdot e^{it}$ $\quad (-\pi/2 \le t \le \pi/2)$

eğrisi için $\tilde{\Gamma}(-\pi/2)$ noktası Γ_1 için bitiş noktası ve $\tilde{\Gamma}(\pi/2)$ noktası da Γ_1 için başlangıç noktası konumundadır.

O halde,

$$\Gamma_1 = -\tilde{\Gamma}(t)$$ olasılı almanız yeterli olur.

(Sizler de bu mantığı kullanmadan Γ_1'i bulunuz.)

Ve, Γ_2: Sanal eksen üzerinden $z=-4i$ noktasını $z=4i$ noktasına bağlayan kompleks eğri olduğuna göre,

$$\Gamma_2: \Gamma_2(t) = x(t) + iy(t)$$
$$= 0 + it \quad (-4 \le t \le 4)$$

şeklindeki eğri olur. O halde, aranan Γ eğrisi

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = (-\tilde{\Gamma}) + \Gamma_2$$ olur.

Değerleri de kisses your hands...