GERÇEL ANALİZ

Hüseyin IRMAK

Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

Çankırı

2017

1. BÖLÜM

DİZİ KAVRAMI

Dizi kavramın matematik biliminde oldukça kullanışlı bir kavramdır. Karşımıza ya *sayı dizileri* ya da *fonksiyon dizileri* şeklinde sıkça çıkar. Öncelikli olarak sayı dizlerini ele alalım.

1.1. Reel (Gerçel) Sayı Dizileri

Bu kavramlara girmeden önce üzerinde temel dört işlemle tanımlanan sayılar kümesini hatırlayalım. Bunlar; doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar olarak bildiğimiz sayıların oluşturduğu ve genellikle $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}'$ şeklinde belirtilen ve sırasıyla aşağıdaki gibi:

$$\mathbb{N} = \big\{0, 1, 2, 3, \cdots\big\},$$
$$\mathbb{Z} = \big\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\big\},$$
$$\mathbb{Q} = \big\{\tfrac{m}{n} : n, m \in \mathbb{Z}\ ve\ n \neq 0\big\}$$

ve

$$\mathbb{Q}'\ :\ \text{“}\ \tfrac{m}{n}\ (n, m \in \mathbb{Z}\ ve\ n \neq 0)\ \text{şeklinde yazılamayan sayılar kümesi ”}$$

şeklinde gösterilen bilindik kümelerdir. Ayrıca üstteki herbir sayı kümesini içeren ve $\mathbb{R}$ notasyonu ile gösterilen küme de yine bildiğimiz ve üzerinde çalıştığımız reel (gerçel) sayılar kümesidir.

Ayrıca, $\mathbb{N}_m$ şeklindeki bir notasyonla da

$$\mathbb{N}_m = \big\{n \in \mathbb{N} : n \geq m \text{ ve } m \in \mathbb{N}\big\} = \big\{m, m+1, m+2, \cdots\ :\ m \in \mathbb{N}\big\}$$

şeklindeki doğal sayıların ardışık ve sonsuz elamanlı kümesi olarak gösterilecektir. Örneklendirecek olursak:

$$\mathbb{N}_0 = \big\{n \in \mathbb{N} : n \geq 0\big\} = \big\{0, 1, 2, \cdots\big\} \equiv \mathbb{N},$$
$$\mathbb{N}_1 = \big\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\big\} = \big\{1, 2, 3 \cdots\big\} \equiv \mathbb{N}^+ \equiv \mathbb{N}_+,$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{N}_{15} = \big\{n \in \mathbb{N} : n \geq 15\big\} = \big\{15, 16, 17, \cdots\big\},$$
$$\vdots$$

şeklindeki doğal sayıların birer alt kümesi durumunda olan sonsuz elamanlı kümeler olacaktır.

Öncelikli olarak matematik biliminde sıkça kullanılan önemli bir terim de *komşuluk* kavramıdır. Bunu da hatırlatalım.

Tanım 1.1. Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Bu sayının bir ϵ ($\epsilon > 0$) (açık) komşuluğu $U_\epsilon(x_0)$, $U(x_0;\epsilon)$, $D_\epsilon(x_0)$ veya $D(x_0;\epsilon)$ notasyonlarından herhangi biri ile gösterilir ve

$$\big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\}$$

şeklindeki kümeyle tanımlanır. Bazı elementer işlemler sonucu,

$$\begin{aligned}\big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\} &= \big\{x \in \mathbb{R} : x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\} \\ &= \big(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\big)\end{aligned}$$

şeklindeki bilindik açık aralık kolayca elde edilir. Bu tanım oldukça önemlidir ve anlamlıdır. Çünkü, ilgili $\epsilon > 0$ sayısı küçültükçe elde edilecek (x_0'ın komşulukları) iç içe geçmiş açık aralıklar (dizisi) olarak karşımıza çıkar. Doğal olarak en içteki açık aralık üzerinde yapılan her bir elementer işlem dıştakiler için de yapılan elementer işlemleri gerektirir. Tabii ki bu işlevin karşıtı doğru olmak zorunda değildir. Bu açıdan iligili $\epsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük seçilse işlevimiz için de o kadar daima doğru olan işlevler söz konusu olur. Bu durum matematik derslerindeki önemli tanımlarda kendini gösterecektir.

Tanım 1.1'in $\mathbb{R}^1$ uzayındaki karşılığının $\big(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon\big)$ şeklindeki kümeye, yani bir açık aralığa karşılık geldiği açıktır. Bazı örnekler olarak;

Örnek 1.1.

a) $U_\epsilon(0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\} = \big(-\epsilon, \epsilon\big)$ kümesi $x_0 = 0$'ın bir (açık) ϵ komşuluğudur.

b) $U_\epsilon(1) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\} = \big(1 - \epsilon, 1 + \epsilon\big)$ kümesi $x_0 = 1$'ın bir (açık) ϵ komşuluğudur.

c) $U_\epsilon(-1) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - (-1)| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < \epsilon\big\} = \big(-1 - \epsilon, -1 + \epsilon\big)$ kümesi de $x_0 = -1$'in bir (açık) ϵ komşuluğu olur.

Bu üstteki komşuluklardaki ilgili ϵ pozitif sayısı sırasıyla $\epsilon = 1$, $\epsilon = 1/2$ ve $\epsilon = 1/10$ olarak seçilirse; ilgili noktaların daha özel komşulukları da aşağıdaki gibi olur.

a′) $U_1(0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < 1\big\} = \big(-1, 1\big)$ şeklindeki $x_0 = 0$ noktasının $\epsilon = 1$ (açık) komşuluğu elde edilir.

b′) $U_{1/2}(0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 1/2\big\} = \big(1 - 1/2, 1 + 1/2\big) = \big(1/2, 3/2\big)$ şeklindeki $x_0 = 1$ noktasının $\epsilon = 1/2$ (açık) komşuluğu elde edilir.

c′) $U_{1/10}(0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 1/10\big\} = \big(-1 - 1/10, -1 + 1/10\big) = \big(-11/10, 9/10\big)$ şeklindeki $x_0 = -1$ noktasının $\epsilon = 1/10$ (açık) komşuluğu elde edilir.

Şimdi bu dersin önemli konularından biri olan dizi kavramı ve bunlarla ilgili temel tanımları verilim ve bazı örneklendirmeler yapalım.

Tanım 1.2.

(i) $\mathbb{N}_m$ kümesinde $\mathbb{R}$ kümesine tanımlanan fonksiyonlara dizi veya reel (gerçel) sayı dizisi adı verilir ve genellikle (x_n), $(x_n)_{n=m}$, $(x_n)_m$ veya $(x_n)_m^\infty$ şeklinde gösterilmesine rağmen "*dizi*" vurgulaması yapılarak sadece x_n $(n \in \mathbb{N}_m)$ ile de ifade edilebilinir.

İlgili fonksiyonun değer kümesi eğer reel sayılar kümesinde ise iligili dizi reel sayı dizisi, eğer değer kümesi kompleks sayılar kümesinde ise kompleks sayı dizisi adını alır. Dolayısıyla, $x_n = f(n) : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ şeklindeki fonksiyonlar birer reel (gerçel) sayı dizisi olacaktır. Bu durumda, $\mathbb{N}_m$ kümesi ilgili dizi (fonksiyon) için bir tanım kümesi ve $\big\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\big\}$ kümesi de ilgili dizi (fonksiyon) için bir değer kümesi konumunda olur.

Önceden belirtmiş olduğumuz $\mathbb{N}_m$ kümesinin dengi ve üstteki tanımda belirtilen bir dizinin fonksiyon olma şartları göz önüne alınırsa, her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n = f(n)$ şeklindeki bir fonksiyonun tanımlılığı zorunlu olmak durumundadır. Bu açıdan, bazen ilgili dizinin nereden başlayacağını da vurgulamak için fonsikyon formunda göstermeksizin doğrudan $(x_n)_m$ gibi bir notasyonla gösterimi de kullanılır.

(ii) Bir $(x_n)_m$ reel (gerçel) sayı dizisi verilsin. Bu dizinin

$$\big(x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n-1}, \cdots\big) \text{ veya } \big\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_{m+n-1}, \cdots\big\}$$

şeklindeki açık ifadesine $(x_n)_m$ dizisinin açık formu adı verilir ve açık formdaki her bir x_m reel sayısına da ilgili dizinin terimleri adı verilir. Bu terimler, elde edilme sırasına göre; ilgili dizinin 1. terim, 2. terim, ..., n. terimi (veya genel terimi) şeklinde adlandırılır.

(iii) Bir kural dahilinde $(x_n)_{n_0}$ gibi (reel sayı) dizisinin öğelerinden oluşan her bir diziye $(x_n)_{n_0}$ dizisinin bir alt dizisi adı verilir. Bu tür diziler genellikle $\big(x_{n_k}\big)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.2.

a) $(x_n) = (1/n)$ şeklindeki bir dizi için, n bir doğal sayı olması gerektiğinden dolayı, ilgili $m = 0$ seçimi $(1/n)$ dizisinin fonksiyon olma şartına uygun olmadığından dolayı ilgili küme, yani $\mathbb{N}_1 \equiv \mathbb{N}^+$ şeklindeki küme olarak seçilmelidir. Yani, $(x_n)_1 = (1/n)_1$ şeklindeki bir dizi söz konusu olup $x_n = f(n)$ dır. Bu dizinin açık formu ise,

$$\begin{aligned}(x_n)_1 = (1/n)_1 &= \big(x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \cdots, x_n = f(n), \cdots\big) \\ &= \big(1/1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\big)\end{aligned}$$

şeklinde olup ve bu dizi için; 1. terim: $1/1 = 1$, 2. terim: $1/2$, üçüncü terim: $1/3$, ... ve n. terim: $1/n$ olan $x_n = f(n) : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $x_n = f(n) = \frac{1}{n}$ şeklindeki fonksiyondur. Dolayısıyla; 1. terim: $x_1 = f(1)$, 2. terim: $x_2 = f(2)$, 3. terim: $x_3 = f(3)$, $\cdots$.

Ayrıca,

$$\big(x_{2n}\big)_1 = \big(1/(2n)\big)_1 = \big(1/2, 1/4, 1/6, \cdots, 1/(2n), \cdots\big),$$
$$\big(x_{2n-1}\big)_1 = \big(1/(2n-1)\big)_1 = \big(1, 1/3, 1/5, 1/7, \cdots, 1/(2n-1), \cdots\big),$$
$$\big(x_{7n-3}\big)_1 = (1/(7n-3))_1 = \big(1/4, 1/11, 1/18, \cdots, 1/(7n-3), \cdots\big)$$

dizilerinin hepsi bir kuralla oluşturulmuştur ve her biri $(x_n) = (1/n)$ dizisinin bire alt kümesi şeklinde olan birer alt dizileridir.

b) $x_n = \sqrt{4-n}$ şeklindeki bir ifade bir diziyi ifade edemenz. Kısacası dizi değildir. Çünkü, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var ve her $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ için ilgili ifade tanımlı olamaz. Bu da fonksiyon olma özelliğini bozar. Eğer ilgili ifade $x_n = \sqrt{n-4}$ olsaydı, o zaman bir diziyi iafde ederdi ve her $n \in \mathbb{N}_{n_0=4}$ ilgili ifade bir fonksiyon olma şartını sağlardı ve ilgili dizinin açık formu da

$$(x_n)_4 = \big(\sqrt{n-4}\big)_4 = \big(x_4, x_5, x_6, \cdots, x_n, \cdots\big) = \big(0 = \sqrt{0}, 1 = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots\big)$$

şeklindeki dizi olur du ve bu dizinin de 1. terim : 0, 2. terim : 1, 3. terim : $\sqrt{2}$, 4. terim : $\sqrt{3}$ şeklinde giden dizi olurdu.

Bu dizi için,

$$\big(x_{2n}\big)_4 = \big(\sqrt{2n-4}\big)\ ,\ \big(x_{2n-1}\big)_4 = \big(\sqrt{2n-3}\big)\ ,\ \big(x_{n+5}\big)_4 = \big(\sqrt{n+1}\big)$$

birer alt dizisidir. Herbirinin açık formlarını da sizler elde ediniz.

Alıştırmalar 1.1. Aşağıda genel terimiyle verilen (reel) sayı dizileri için önce uygun bir başlangıç doğal sayısını belirleyiniz ardından da açık formlarını oluşturunuz.

$$\sin(n\pi)\ ,\ (-1)^n\ ,\ n!\ ,\ (-2)^n\ ,\ \tfrac{n}{n^2-4}\ ,\ \tfrac{3n-5}{n(n+1)}\ ,\ \tfrac{(-1)^n}{n^2-4n}\ ,\ n-(-1)^n\ ,\ n^{n!}\ ,$$
$$\big(1+\tfrac{2}{n}\big)^n\ ,\ \cos\big(\tfrac{\pi}{n}\big)\ ,\ (1-\tfrac{1}{n})^n\ ,\ n-\sqrt{n}\ ,\ n^n\ ,\ n^2-2\sqrt{n}\ ,\ ne^{-n}\ ,\ \tfrac{\ln n}{n+1}\ .$$

(iii) Bir $(x_n)_m$ reel (gerçel) sayı dizisi verilsin. Eğer her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde (en az) bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa bu diziye üstten sınırlı bir dizi veya kısacası üstten sınırlıdır denir. Benzeri mantıkla, eğer her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde (en az) bir $K \in \mathbb{R}$ sayısı varsa ilgili diziye alttan sınırlı bir dizi veya kısacası alttan sınırlıdır denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere alttan ve üstten sınırlı bir dizi veya kısacası sınırlı diziler adı verilir.

Bazen belirtilen sınırlılık durumunu her $n \in \mathbb{N}_m$ için $|x_n| \leq \tilde{M}$ olacak şekildeki (en az) bir $\tilde{M}$ pozitif sayısının varlığı şeklinde de tanımlanır. Doğal olarak, üstte belirtilen m ve M reel sayıları mutlak değerin tanımı gereğince,

$$m = -M \leq x_n \leq \tilde{M} = M$$

şeklindeki sınırlandırılan reel sayılar olacağı açıktır. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}_m$ için $(x_n)_m$ sınırlı dizisi için $x_n \leq M_i$ koşulunu sağlayan herbir M_i reel sayısına (x_n) dizisinin bir üst sınırı ve $x_n \geq M_i$ koşulunu sağlayan herbir m_i reel sayısına da (x_n) dizisinin bir alt sınırı adı verilir.

Örnek 1.3.

a) Örnek 1.1'de verilen dizinin her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \leq M_i \leq 1$ olduğundan dolayı üstten sınırlı ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \geq M_i \geq 0$ olduğundan dolayı da alttan sınırlı bir dizidir. Dolayısıyla, $\big(1/n\big)_1$ dizisi sınırlı bir dizi olur. Ayrıca, $M_i \geq 1$ koşulunu sağlayan her reel sayı ilgili dizi için bir üst sınır ve $m_i \leq 0$ koşulunu sağlayan herbir reel sayı da dizi için bir alt sınır olur.

b) $\big(n(-1)^n\big)_0 = \big(0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots\big) = \big(\cdots, -5, -3, -1, 0, 2, , 4, 6, \cdots\big)$ dizisinin de ne alttan ne de üstten sınırlı olmadığı açıktır. Dolayısıyla, bu dizinin ne bir üst sınırı ne de bir alt sınırı vardır.

c) $\big(\frac{(-1)^n}{n^2}\big)_1 = \big(-\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, -\frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2} \cdots\big) = \big(-1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}, \cdots, \cdots \frac{1}{36}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}\big)$ dizisinin de hem üstten hem de alttan sınırlı olduğu açıktır. Terimler bir negatif bir pozitif veya bir pozitif bir negatif olan dizilere alternatif dizi adı verilir. Bu dizi için $M_i \geq 1/4$ koşulunu sağlayan her reel sayı bir üst sınır ve $m_i \leq -1$ koşulunu sağlayan herbir reel sayı da bir alt sınır olur.

ç) $\big(-n\big)_0 = \big(0, -1, -2, -3, -4, -5, \cdots\big) = \big(\cdots, -5, -3, -2, -1, 0\big)$ dizisinin üstten sınırşı ama alttan sınırlı olmadığı açıktır. Dizisi için herhangi bir alt sınırından bahsedemeyiz ama $M_i \geq 0$ koşulunu sağlayan herbir reel sayı bir üst sınır olur.

d) $\big(n^2\big)_0 = \big(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \cdots\big) = \big(0, 1, 4, 9, 16, 25, \cdots\big)$ dizisinin de üstten sınırlı olmadığı ama alttan sınırlı olduğu açıktır. Dizisi için herhangi bir üst sınır söz konusu değildir ama $m_i \leq 0$ koşulunu sağlayan herbir reel sayı ise bir alt sınır olur.

e) $\big(3\big)_0 = \big(3, 3, 3, 3, 3, \cdots\big)$ dizisinin hem üstten hem de alttan sınırlı olduğu açıktır. Bu tür, yani bütün terimler biribirine eşit olan dizilere sabit diziler olarak adlandırılır. Bu sabit dizi için, $M_i \geq 3$ koşulunu sağlayan her reel sayı bir üst sınır ve $m_i \leq 3$ koşulunu sağlayan herbir reel sayı da bir alt sınır olur.

Alıştırmalar 1.2. Aşağıda genel terimiyle çeşitli (reel) sayı dizileri verilmiştir. Herbiri için önce uygun başlangıç bir doğal sayısını belirleyiniz ardından da herbirinin sınırlı olup olmadıklarını araştırınız.

$$\tfrac{6}{n-2}\ ,\ 1-(-1)^n\ ,\ \tfrac{\pi}{n}/\ ,\ \tfrac{2n+1}{3n^2-1}\ ,\ \tfrac{3n-5}{2n-6}\ ,\ \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ ,\ n-(-n)^n\ ,\ \tfrac{1}{n-\sqrt{n}}\ ,\ \sqrt{n^2-9}\ ,$$

$$(-3)^n\ \tfrac{n}{2n+1}\ ,\ \sqrt{3n-5}\ ,\ 2^n\ ,\ 1-\tfrac{1}{n^5}\ ,\ 1+(-1)^n\ ,\ \tfrac{n}{n^2-16}\ ,\ \tfrac{1}{n(n+1)}\ ,\ \tfrac{1}{n(n^4-1)}\ ,$$

$$\tfrac{1}{n^3-1}\ ,\ (-1)^n\tfrac{2n+1}{3n-6}\ ,\ n^{1/n}\ ,\ \tfrac{(-1)^n}{\ln n}\ ,\ 2^{-n}\ ,\ \big(\tfrac{2}{5}\big)^n\ ,\ \sqrt{n-6}\ ,\ \big(\tfrac{3}{2}\big)^n\ ,\ \tfrac{n}{(n^2-1)(n-5)}\ .$$

(iv) Bir $(x_n)_m$ reel (gerçel) sayı dizisi verilsin. Eğer her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \leq M_i$ olacak şekilde (en az) bir $M_i \in \mathbb{R}$ sayıları var olsun. Bu durumda, $\min\big\{K_i : K_i \in \mathbb{R}\big\}$ sayısına

$(x_n)_m$ dizisnin supremumu veya kısacası sup'u denir ve genellikle $\sup_n \{x_n : n \in \mathbb{N}_m\}$ şeklinde gösterilir. Benzeri şekilde, her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \leq M_i$ olacak şekilde (en az) bir $M_i \in \mathbb{R}$ sayıları var olsun. Bu durumda, $\max\{M_i : M_i \in \mathbb{R}\}$ sayısına $(x_n)_m$ dizisnin infinimumu veya kısacası inf'i denir ve genellikle $\inf_n \{x_n : n \in \mathbb{N}_m\}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.4. Aşağıda verilenlerin doğru olup olmadıklarını araştırınız.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{3 - 2(-1)^n\} = 5 \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}} \{3 - 2(-1)^n\} = 1 \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \{2^n\} = 2 \ ,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\tfrac{1}{n!}\right\} = 1 \ , \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\tfrac{2}{3n-1}\right\} = \tfrac{2}{3} \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\tfrac{2}{3n-1}\right\} = -1 \ , \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\tfrac{2n-1}{3n+1}\right\} = \tfrac{2}{3} \ ,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \{4-n\} = 3 \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \{n^n\} = 1 \ , \inf_{n\in\mathbb{N}_4} \left\{\sqrt{n-4}\right\} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sup_{n\in\mathbb{N}^+} \{n^2\} = 1 \ ,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \left\{\tfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\} = 1 \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \{e^{-n}\} = 0, \ \sup_{n\in\mathbb{N}^+} \left\{1 - \tfrac{1}{n}\right\} = 0 \ , \ \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \{n^n\} = 1 \ .$$

Sonuç 1.1. Üstten sınırlı her (reel) sayı dizisinin bir supremumu, allttan sınırlı her (sayı) dizinin infinimumu ve dolayısıyla sınırlı her (reel) sayı dizisinin de hem supremumu hem de infinimumu vardır.

Şimdi dizlerle üzerinde tanımlanan temel işlemleri verelim.

Tanım 1.3. $(x_n)_m$ ve $(y_n)_m$ (reel) sayı diziler ile α ve β reel sabitleri (skalarları) verilsin. Bu durumda;

(i) Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n = y_n$ ise $(x_n)_m$ ve $(y_n)_m$ dizilerine eşit diziler denir ve $(x_n) = (y_n)$ şeklinde gösterilir.

(ii) $(x_n)_m$ dizisinin bir α sabiti ile çarpımı $\alpha \cdot (x_n)_m$ şeklinde gösterilir ve $\alpha \cdot (x_n)_m = (\alpha \cdots x_n)_m$ şeklinde tanımlanır.

(iii) $(x_n)_m$ ve $(y_n)_m$ dizilerin toplamları $(x_n)_m + (y_n)_m$ şeklinde gösterilir ve $(x_n)_m + (y_n)_m = (x_n + y_n)_m$ şeklinde tanımlanır.

(iv) $(x_n)_m$ ve $(y_n)_m$ dizilerin çarpımı $(x_n)_m \cdot (y_n)_m$ şeklinde gösterilir ve $(x_n)_m \cdot (y_n)_m = (x_n \cdot y_n)_m$ şeklinde tanımlanır.

(v) $(x_n)_m$ dizisinin $(y_n)_m$ dizisine bölümü $\frac{(x_n)_m}{(y_n)_m}$ şeklinde gösterilir ve $\frac{(x_n)_m}{(y_n)_m} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)_m$ şeklinde tanımlanır. Tabii ki her $n \in \mathbb{N}_m$ için $y_n \neq 0$ dır.

Bildiğimiz $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlanan temel işlemler yardımıyla üstteki gibi oluşturulan tanımlamalar paralelinde:

$$-(x_n) = (-1)\cdot(x_n) = \big(((-1)x_n\big) = (-x_n) \ ,$$

$$(x_n) - (y_n) = (x_n) + \big(- (y_n)\big) = \big(x_n - y_n\big)$$

$$\alpha\cdot(x_n) + \beta\cdot(y_n) = \big(\alpha\cdot x_n + \beta\cdot y_n\big)$$

olacağı açıktır. Ayrıca, ikiden fazla sayı dizisi, örneğin; $(x_n)_m$, $(y_n)_m$ ve $(z_n)_m$ dizileri için de $(x_n)\cdot(y_n)\cdot(z_n) = \big(x_n\cdot y_n\cdot z_n\big)$ gibi tanımlanacaktır.

Örnek 1.5. $(x_n)_0 = (1)_0$, $(y_n)_0 = (n)_0$ ve $(z_n)_0 = (n^2)_0$ (reel) sayı dizileri için;

$$3\cdot(x_n)_0 = 3\cdot(1)_0 = (3\cdot 1)_0 = (3)_0 \ , \ (x_n)_0 + (y_n)_0 = (1)_0 + (n)_0 = (1+n)_0 \ ,$$

$$(x_n)_0\cdot(y_n)_0 = (x_n\cdot y_n)_0 = (1\cdot n)_0 = (n)_0 \ \text{ ve } \ \frac{(y_n)_0}{(x_n)_0} = \frac{(n)_0}{(1)_0} = \left(\frac{n}{1}\right)_0 = \left(n\right)_0 \ ,$$

$$(x_n)_0\cdot(y_n)_0\cdot(z_n)_0 = (x_n\cdot y_n\cdot z_n)_0 = (1\cdot n\cdot n^2)_0 = \left(n^2\right)_0 \ .$$

Alıştırmalar 1.3. $(x_n)_0 = (-n)_1$, $(y_n)_1 = (n)_1$ ve $(z_n)_0 = (1/n)_1$ dizilerini kullanarak, aşağıda verilenleri belirleyiniz.

$$3(x_n) - 2(z_n) + 5(y_n) \ , \ \frac{(x_n)}{(z_n)(y_n)} \ , \ (x_n)(y_n) - (z_n) \ , \ \frac{(x_n)-(y_n)}{(z_n)+(y_n)} \ , \ (y_n) + \frac{(x_n)}{(z_n)}$$

Aşağıda genel terimiyle çeşitli (reel) sayı dizileri verilmiştir. Her biri için önce uygun başlangıç bir doğal sayısını belirleyiniz ardından da herbirinin sınırlı olup olmadıklarını araştırınız.

Şimdi, (reel) sayı dizilerin artanlığına ve azalanlığına ilişkin önce tanımlamaları yapalım ardından da örneklendirelim.

Tanım 1.4. Bir $(x_n)_m$ (reel) sayı dizisi verilsin. Bu durumda:

(i) Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \leq x_{n+1}$ koşulu sağlanıyor ise $(x_n)_m$ dizisine (monoton) artan dizi veya kısaca (monoton) artandır denir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n \geq x_{n+1}$ koşulu sağlanıyor ise $(x_n)_m$ dizisine (monoton) azalan dizi veya kısaca (monoton) azalandır denir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n < x_{n+1}$ koşulu sağlanıyor ise $(x_n)_m$ dizisine kesin artan dizi veya kısaca kesin aratndır denir.

(iv) Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n > x_{n+1}$ koşulu sağlanıyor ise $(x_n)_m$ dizisine kesin azalan dizi veya kısaca kesin azalandır denir.

Dizilerin monotonlukları (artan ya da azalan) araştırmada verilen dizinin durumuna göre güçlükler yaşayabiliriz. Bu konuda aşağıda bilgileri göz önüne almakta fayda görebiliriz.

Uyarı 1.1.

(i) İlgili eşitsizler bazı elementer işlemlerle yürütülmeye çalışılır ve herhangi bir çelişki yoksa ilgili eşitsizliğin doğruluğu kesinleşir.

(ii) Dizilerin $\mathbb{N}_m$ şeklinde tanımlı olduğu küme doğal sayıların ardışık ve sonsuz elemandan oluşan bir küme olması Tümevarım yöntemine uygunluk gösteren bir ispat yöntemi işaret eder. Bunun için de;

$$q(n) : x_n \leq x_{n+1} \ \equiv \frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1 \quad \left(\text{veya } \ q(n) : x_n \geq x_{n+1} \ \equiv \frac{x_n}{x_{n+1}} \geq 1\right)$$

önermesinin her n∈I=$\mathbb{N}_m$ için doğruluğunu tümevarım yöntemi yardımıyla araştırma yoluna gidilir.

(iii) İlgili araştırmların yapılması için fonksiyon kavramlarını kullanılabilinir. Burada $\mathbb{N}_m \subset [m, \infty)$ olduğuna göre, verilen u_x gibi bir genel terimli dizinin reel x değişkenli $f(x) = u_x$ şeklindeki fonksiyonun birinci türev araştırılması yoluna gidilebilir. Yani, ilgili aralıktaki her x için $f'(x) < 0$ ya da $f'(x) > 0$ olması monotonluk araştırması için yeterli olacaktır.

Şimdi, bu durumları birer örnekle ele alalım.

Örnek 1.6.

a) $x_n = \frac{3n-1}{2n+1}$ genel terimli (reel) sayı dizisinin artanlığının ya da azalanlığını araştıralım. Bu dizi için ilgili m doğal sayısının en az $m = 0$ alınmasında problem olmadığı açıktır. Yani, $(x_n)_0 = \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)_0$ şeklinde dizi söz konusudur. Buna göre,

$$w_n = x_n - x_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+3} = \frac{6n}{(2n+1)(2n+5)}$$

elde edilir ki bu da her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = x_n - x_{n+1} \geq 0$, yani $x_n \geq x_{n+1}$ demektir. Bu ise ilgili dizinin azalan bir dizi olduğunu gösterir. (Daha doğrusunu söylemek isteseydik, bu dizi için monoton azalan mı yoksa kesin azalan mı dememiz gerekirdi? Tartışınız.)

b) $n \in \mathbb{N}_4$ olmak üzere $x_n = \frac{3^n}{n!}$ genel terimli (reel sayı) dizisinin (monoton) artan olup olmadığını tümevarım metodunu kullanarak sizler araştırınız. Yani, her $n \geq 4$ için $q(n) = x_{n+1} - x_n = \cdots > 0$ önermesinin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle araştırınız.

c) Son olarak $x_n = arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ genel terimli (reel sayı) dizisinin artanlığının ya da azalanlığını araştıralım. Bu dizi için ilgili m doğal sayısının en az $m = 1$ alınması gerektiği açıktır. Bu durumda, $\mathbb{N} \subset [1, \infty)$ olduğundan dolayı $[1, \infty)$ kümesi üzerinde sürekli olan $f(x) = arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonunun incelenmesi yeterli olacaktır. İneleyelim:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

elde edilir ki bu da bizi her $x \in [1, \infty)$ için $f'(x) < 0$ sonucuna götürür. O halde, ilgili fonksiyon $[1, \infty)$ aralığında azalan bir fonksiyon olması $\big(arctan(1/n)\big)_1$ dizisinin de azalan olmasını gerektirir.

Alıştırmalar 1.4. Aşağıda genel terimleri verilen (reel sayı) dizilerinin monotonluklarını araştırınız.

$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $2 - \sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \cdots - \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$,

$n - \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $n + \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $1 + \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $1 - \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$,

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$,

$$2^{-1/n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ , \ 2^{1/n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ , \ 2^{-n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ , \ n2^{-n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ ,$$
$$\ln n \ (n \in \mathbb{N}_2) \ , \ \tfrac{1}{\ln n} \ (n \in \mathbb{N}_3) \ , \ \tfrac{n}{\ln n} \ (n \in \mathbb{N}_3) \ , \ \tfrac{\ln n}{n} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ ,$$
$$\sin(1/n) \ (n \in \mathbb{N}) \ , \ \cos(1/n) \ (n \in \mathbb{N}) \ , \ \tfrac{\sin n}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \ , \ \tfrac{n}{cosn} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ ,$$
$$2^{-n!} \ (n \in \mathbb{N}_1) \ , \ \tfrac{2^n}{n!} \ (n \in \mathbb{N}_3) \ , \ \tfrac{n!}{2^n} \ (n \in \mathbb{N}_3) \ , \ \tfrac{\sqrt{n}}{n!} \ (n \in \mathbb{N}^+) \ , \ \tfrac{n!}{\sqrt{n}} \ (n \in \mathbb{N}_3) \ .$$

Şimdi (reel) sayı dizilerinin yakınsaması ile ilgili tanımları, bazı temel önermeleri ve uygulamaları verelim.

Tanım 1.5. Bir $(x_n)_m$ (reel) sayı dizisi ve bir de x_0 reel sayısı verilsin. Her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir N doğal sayı var ve bu N sayısını geçen her n doğal sayısı için $\left|x_n - x_0\right| < \epsilon$ oluyorsa, $(x_n)_m$ dizisine x_0'a yakınsıyor denir.

Yakınsak olan dizilere kısaca *yakınsaktır* ve yakınsak olmayan dizilere de *ıraksak dizi* veya kısaca *ıraksaktır* denir.

Bilindiği üzere ilgili yakınsama zaman zaman dizinin limiti olarak da adlandırılır ve bu durum n ($n \to \infty$) sonsuza giderken (yaklaşırken) $(x_n)_n$ dizisi de x_0'a gider (yaklaşır) denir. Bu durum, kısaca "$(x_n)_n$ dizisinin limiti x_0'dır" denir ve durum ya $n \to \infty$ *iken* $x_n \to x_0$ şeklinde ya da $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımda önemli olan iki husus vardır. Bunları belirtmekte (vurgulamakta) önem görmekteyiz. Bunlar:

Bazen ilgili (aranan) N doğalsayısı $N(\epsilon)$ şeklinde de ifade edilir. Bu oldukça açık bir ifadedir. Çünkü, tanımdan da anlaşılacağı üzere, "$\epsilon > 0$ sayısı verilmekte ve $\left|x_n - x_0\right| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlanması" ifade edilmektedir. Elbette ki böylesi bir eşitsizlik verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısına göre belirlenecektir.

Diğeri ise, ilgili keyfilik istenilen kadar küçük olmasıyla önem arz eder. Çünkü, her $\epsilon_i < \epsilon_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ için

$$|\cdot o \cdot| < \epsilon_i \ \Rightarrow \ |\cdot o \cdot| < \epsilon_j$$

gerektirmesi daima doğru olur. (Lütfen dikkat: $|\cdot o \cdot| < r$ $(r > 0)$ eşitsizliğinin doğru olamsı durumunda $R > r > 0$ koşulunu sağlayan her R sayısı için $|\cdot o \cdot| < R$ eşitsizliği de daima doğru olur. Ama böylesi bir önermenin karşıtı daima doğru olmaz!)

Örnek 1.7.

a) $x_n = \frac{1}{n}$ genel terimli (reel sayı) dizisinin 0'a yakınsadığını, diğer bir ifade ile $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğunu gösterelim.

Her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir $N := N(\epsilon)$ doğal sayısını bulmalıyız ki her $n \geq N$ doğal sayısı için $\left|x_n - x_0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$ doğru olsun.

$\epsilon > 0$ keyfi sayısı verilsin. O zaman,

$$\left|x_n - x_0\right| = \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} < \epsilon$$

doğru olur, eğer $N := N(\epsilon) > 1/\epsilon$ olacak şekildeki herhangi bir (örneğin, $N := N(\epsilon) = 1 + [\![1/\epsilon]\!]$) doğal sayı seçimi yapılırsa. (Lütfen dikkat: Doğru olması istenen $|\frac{1}{n} < \epsilon$ eşitsizliği n göre çözülürse $\frac{1}{\epsilon} < n$ sonucu kolayca görülür. Bu mantıkla, her keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için $\frac{1}{\epsilon} < n$ şeklindeki bir çözümün varlığı daima var olacağına göre, istenenin de bir doğal sayısı ilişkisi de her $n \geq N := N(\epsilon) = 1 + [\![1/\epsilon]\!]$ sağlanmış olur.)

b) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ genel terimli (reel sayı) dizisinin 1'a yakınsadığını, yani $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$ olduğunu görelim.

Yine ilgili tanım gereği, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir $N := N(\epsilon)$ doğal sayısını bulmalıyız ki her $n \geq N$ doğal sayısı için $\left|x_n - x_0\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| < \epsilon$ doğru olsun.

Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$\left|x_n - x_0\right| = \left|\left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right) - 1\right| = \left|\tfrac{1}{n^2}\right| = \tfrac{1}{n^2} < \epsilon$$

doğru olur, eğer $N := N(\epsilon) > 1/\sqrt{\epsilon}$ koşulunu sağlayacak şekilde (örneğin, $N := N(\epsilon) = 1 + [\![1/\sqrt{\epsilon}]\!]$) seçimi yapılırsa. Gerçekten de, her $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \neq N := N(\epsilon) > 1/\sqrt{\epsilon}$ (örneğin, $N := N(\epsilon) = 1 + [\![1/\sqrt{\epsilon}]\!]$ şeklinde bir doğal sayısı seçilirse) için $\left|\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 1\right| < \epsilon$ daima doğru olur. $\epsilon > 0$ sayısının keyfiliği, yani daima işe yarayan $\epsilon \to 0$ ilişkisi $\left|\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| \to 0$ bu da $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 1 \to 0$ veya denk olarak $1 + \frac{1}{n^2} \to 1$ doğal sonucuna götürür. Bu da zaten bilmiş olduğumu limit ilişkisidir.

c) $(x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ dizisinin 1'e yakınsadığını yani, $lim_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ olduğunu görelim. Bunun için de, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulmalıyız ki her $n > n_0$ için $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon$ olsun. O zaman,

$$\left|\tfrac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\tfrac{1}{n}\right| = \tfrac{1}{n} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon}$$

olacağına göre, en basitten $\frac{1}{\epsilon}$ sayısından büyük olan ilk doğal sayıyı n_0 ile gösterirsek o zaman her $n > n_0 (= n_0(\epsilon))$ için $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon$ olur. O halde, $lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ dir.

ç) Her $\kappa > 0$ sabit sayısı için $(x_n) = \left(n^{-\kappa}\right)_2$ dizisi 0'a yakınsar. Bunun için, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı bulmalıyız ki her $n > N$ için $\left|\frac{1}{n^\kappa} - 0\right| < \epsilon$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $N = N(\epsilon) = 1 + \left[\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\epsilon}}\right]$ seçilirse,

$$\left[N = N(\epsilon) > \tfrac{1}{\sqrt[\kappa]{\epsilon}} \ ve\ \kappa > 0\right] \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{N^\kappa} < \epsilon$$

gerektirmesi doğru olur. O zaman,

$$\forall\, n \geq N = N(\epsilon) \ \Rightarrow \ \left|\tfrac{1}{n^\kappa} - 0\right| = \tfrac{1}{n^\kappa} \leq \tfrac{1}{N^\kappa} < \epsilon$$

gerektirmesi de doğru olur. Bu ise, $\left(\frac{1}{n^\kappa}\right)$ dizisinin yakınsak ve $\frac{1}{n^\kappa} \to 0$ olmasıdır.

d) Her α ve $r \neq 1$ reel sayıları için, $|r| < 1$ ise $\left(\alpha r^n\right)_1$ dizisi 0'a yakınsar ve $|r| > 1$ için de $\left(\alpha r^n\right)_1$ dizisi ıraksaktır. $|\alpha| > \epsilon > 0$ koşulu sağlayan her $\epsilon > 0$ için öyle bir N doğal sayısı bulmalıyız ki her $n > N$ için $|\alpha r^n - 0| < \epsilon$ olsun. o zaman, $|\alpha r^n - 0| = |\alpha||r^n| = |\alpha||r|^n < \epsilon \;\Rightarrow\; |r|^n < \epsilon/|\alpha|$ ve buradan da

$$\log\left(|r|^n\right) < \log\left(\epsilon/|\alpha|\right) \;\Rightarrow\; n > \frac{\log(\epsilon/|\alpha|)}{\log|r|}$$

elde edilir. Eğer

$$N \geq N(\epsilon) = 1 + \left[\frac{\log(\epsilon/|\alpha|)}{\log|r|}\right]$$

seçersek, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde ilgili eşitsizliği gerektiren bir N doğal sayısı bulabiliriz. $|r| > 1$ olması durumunda da $\lim_{n\to\infty} \alpha r^n = sgn(\alpha)\infty$ olcaktır. Yani, limit olmaz.

Alıştırmalar 1.5.

i) Aşağıda verilenlerin doğruluklarını görünüz.

$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{\sqrt{n}}\right) = 3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{3n+2} = \frac{5}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3-5n}{3n-4} = -\frac{5}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+2} = -\frac{3}{5}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2-4} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-n} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{sin}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{cosn}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

ii) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin limitlerini önce belirleyiniz sonra da doğruluklarını görünüz.

$\frac{1-n}{1+n}$, $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$, $\frac{n^2}{2n^2+1}$, $\frac{3n-2}{2n+1}$, $\frac{1-2n}{2-3n}$, $\frac{n}{2n-5}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^n$, 5^{-n^2} , $\frac{(-1)^n}{5^n}$, $\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$, $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.

iii) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin karakterlerini (yakınsak mı yoksa ıraksak mı) araştırınız.

$\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\frac{n-2}{2n+1}$, $\frac{3n^2-2}{2n+5}$, 2^n , $\frac{\ln n}{n}$, $\frac{n}{lnn}$, $\frac{(-1)^n}{5^n}$, $\frac{1-n}{\sqrt{1+n^2}}$, $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+10}$, $\frac{n}{2^n}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^n$, $(-1)^n$.

Dizilerin yakınsaklıkları ile ilgili daima doğru olan önermeler vardır ki (biz bunlara ispatı mümkün olan önerme, yani teorem deriz) bunlara sıkça kullanılmaktadır. Şimdi bunları verelim.

Teorem 1.1. Bir $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ (reel sayı) dizileri ile α ve β reel skalarları verilsin. Bu durumda;

(i) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise yakınsadığı sayı sadece bir tanedir. (Diğer bir ifade ile ilgili dizisinin limiti var ise bu sadece bir tanedir.)

(ii) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise sınırlıdır. (Yani, $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise her $n \geq n_0$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde (en az) bir $M > 0$ reel sayısı vardır.)

(iii) $(x_n)_{n_0}$ artan (azalmayan) ve üstten sınırlı bir dizisi ise yakınsaktır.

(iv) $(x_n)_{n_0}$ azlan (artmayan) ve alttan sınırlı bir dizisi ise yakınsaktır.

(v) Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisi yakınsak ise her bir $\left(x_{n_k}\right)_{n_0}$ alt dizisi de yakınsaktır.

(vi) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise $|(x_n)_{n_0}| = \left(|x_n|\right)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır.

(vii) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise $(\alpha x_n)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır. (Diğer bir ifade ile, $(x_n)_{n_0}$ dizisinin limiti, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $(\alpha x_n)_{n_0}$ dizisinin limiti, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha x_0$ dır.)

(viii) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ve her $n \geq n_0$ için $x_n \neq 0$ ise $\left(1/x_n\right)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır. (Burada ilgili dizi elbette ki sıfıra yakınsamayan bir dizidir.)

(ix) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri yakınsak ise $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır.

(x) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri yakınsak ise $(x_n y_n)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır.

(xi) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri yakınsak ise $\left(x_n/y_n\right)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır. (Burada elbette ki $(y_n)_{n_0}$ dizi sıfıra yakınsamayan ve her $n \geq n_0$ için $y_n \neq 0$ olan bir dizidir.)

(xii) $(x_n)_{n_0}$ dizisi yakınsak ve ve verilen herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı için dizinin herbir terimi x_n^r tanımlı, $r < 0$ olması durumunda herbir terimi sıfırdan farklı ve sıfıra yakınsamayan bir dizi ise $\left(x_n^r\right)_{n_0}$ dizisi de yakınsaktır.

Ütteki teoremi elbetteki limit olarak ifade etseydik aşağıdaki gibi olurdu.

Teorem 1.1′. Bir $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ (reel sayı) dizileri ile α ve β reel skaları verilsin. Bu durumda;

(i′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise yakınsak ise x_0 reel sayısı biriciktir.

(ii′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $(x_n)_{n_0}$ sınırlıdır.

(iii′) $(x_n)_{n_0}$ artan ve üstten sınırlı bir dizisi ise $\lim_{\nu\to\infty} x_n = x_0$ olacak şekilde sadece bir tane x_0 reel sayısı vardır.

(iv′) $(x_n)_{n_0}$ azlan ve alttan sınırlı bir dizisi ise $\lim_{\nu\to\infty} x_n = x_0$ olacak şekilde sadece bir tane x_0 reel sayısı vardır.

(v′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $(x_n)_{n_0}$ dizisinin her bir $\left(x_{n_k}\right)_{n_0}$ gibi yine $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$ dır.

(vi′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $\lim_{\nu\to\infty} |x_n| = |x_0|$ dır.

(vii′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ise $\lim_{\nu\to\infty} \left(\alpha x_n\right) = \alpha \lim_{\nu\to\infty} \left(x_n\right) = \alpha x_0$ dır.

(viii′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq 0$ ve her $n \geq n_0$ için $x_n \neq 0$ ise $\lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\lim_{\nu\to\infty} x_n} = \frac{1}{x_0}$

dır.

(ix′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ ise $\lim_{n\to\infty}\big(\alpha x_n + \beta y_n\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\alpha x_n\big) + \lim_{n\to\infty}\big(\beta y_n\big) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha x_0 + \beta x_0$ dır.

(x′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ ise
$\lim_{n\to\infty}\big(x_n y_n\big) = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} y_n\big) = x_0 y_0$ dır.

(xi′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \neq 0$ ve her $n \geq n_0$ için $y_n \neq 0$ ise $\lim_{n\to\infty}\big(\frac{x_n}{y_n}\big) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$ dır.

(xii′) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ve verilen herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı için dizinin herbir terimi x_n^r tanımlı, $r < 0$ olması durumunda herbir terimi sıfırdan farklı ve sıfıra yakınsamayan bir dizi ise $\lim_{n\to\infty}\big(x_n^r\big) = x_0^r$ dır.

Şimdi ilk ikisini ispatlayıp diğerlerini de sizlerin araştırmasına bırakalım.

İspat.

(i) İlgili dizinin $x_n \to a$ ve $x_n \to b$ şeklindeki iki farklı sayıya yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle birer N_1 ve N_2 doğal sayıları vardır öyleki

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \text{ için } |x_n - a| < \epsilon/2 \quad \big(\Rightarrow \; |x_n - a| < \epsilon\big)$$

ve

$$\forall n \in \mathbb{N}_2 \text{ için } |x_n - b| < \epsilon/2 \quad \big(\Rightarrow \; |x_n - a| < \epsilon\big)$$

dır. Buna göre, eğer $M = N(\epsilon) = \min\{N_1, N_2\}$ olarak seçilirse her $n \geq N$ için

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| = |-(x_n - a) + (x_n - b)|$$

$$\leq |x_n - a| + |x_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. O halde aranan doğal sayısı bulunmuş olur. Verilen $\epsilon > 0$ sayısı keyfi olduğunadan dolayı, üstteki eşitsizlikten kolayca $|a-b|$ ifadesi en küçük olarak sıfır olur. Bu da $a = b$ demektir. Bu ise, başlangıçtaki varsayımımızla (iki farklı limitin kabulü ile) çelişki oluşturur ki bu da ispatı bitirir.

(ii) $(x_n)_{n_0}$ (reel sayı) dizisi yakınsak olsun. O zaman, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle birer $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı vardır ve her $n \geq N$ için $|x_n - x_0| < \epsilon$ dır. İstenilen ise her $n \geq n_0$ için $|x_n| \leq K$ olacak şekildeki bir $k > 0$ sayısını bulmaktır. Araştıralım.

İlgili dizinin yakınsaklığından dolayı , ilgili N. doğal sayısından önceki dizisinin terimleri için, yani

$$M = \max\big\{|x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \cdots, |x_{n_0+N-1}|, \epsilon\big\}$$

seçimi ile birlikte $\epsilon < 1$ seçimi göz önüne alınırsa,

$$|x_n| = |x_n - x_0 + x_0| \leq |x_n - x_0| + |x_0| \leq M + \epsilon < 1 + M = K$$

elde edilir ki, bu da $(x_n)_{n_0}$ dizisinin sınırlı olması demektir.

(iii) $(x_n)_{n_0}$ dizisi monoton artan (azalmayan) ve üstten sınırlı bir dizi olsun. O zaman,

$$x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq \cdots \leq x_{n_0+n} \leq \cdots$$

olacağı için $\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_{n_0}\}$ gibi reel sayısı mutlaka vardır. $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\alpha - \epsilon$ sayısı $\{x_n : n \in \mathbb{N}_{n_0}\}$ kümesinin bir üst sınırı olamayacağından dolayı, $\alpha - \epsilon < x_n$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir N doğal sayısı vardır ve

$$n \geq N \;\Rightarrow\; \alpha - \epsilon < x_N \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon \;\Rightarrow\; |x_n - \alpha| < \epsilon$$

olur ki, bu da, $x_n \to \alpha$ demektir.

(x) (x_n) dizisi $X_0 \in \mathbb{R}$ sayısına ve (y_n) dizisi de $y_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsasın. O zaman, her keyfi $\epsilon_1 > 0$ ve $\epsilon_2 > 0$ sayıları için birer $N_1 = N_1(\epsilon_1)$ ve $N_2 = N_2(\epsilon_2)$ doğal sayıları vardır ve $\forall\, n \geq N_1$ için $|x_n - x_0| < \epsilon_1$ ve $\forall\, n \geq N_2$ için $|y_n - y_0| < \epsilon_2$ dır. O halde, her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı bulmalıyız ki $\forall\, n \geq N$ için $|x_n y_n - x_0 y_0| < \epsilon$ olsun. Buna göre, $n \geq N$ koşulunu sağlayan her $n \in N$ sayısı için

$$|x_n y_n - x_0 y_0| = |x_n y_n - x_0 y_0 - x_n y_0 + x_n y_0| = |x_n(y_n - y_0) - b(x_n - x_0)|$$
$$\leq |x_n||y_n - y_0| + |y_0||x_n - x_0| < |x_n|\epsilon_1 + |y_0|\epsilon_2$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(1+M)}$ ve $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2(1+|y_0|)}$ seçimleri yapılırsa,

$$\forall\, n \in N = N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon_1), N_2(\epsilon_2)\} = max\left\{N_1\left(\tfrac{\epsilon}{2(1+M)}\right), N_2\left(\tfrac{\epsilon}{2(1+|y_0|)}\right)\right\}$$

olması durumunda

$$|x_n y_n - x_0 y_0| \leq |x_n||y_n - y_0| + |y_0||x_n - x_0| < |x_n|\epsilon_1 + |y_0|\epsilon_2 < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

sonucuna kolayca varılır. Böylece, verilen N doğal sayısının kabülü istenen ispat bitirir.

Soyut matematik dersinden bilmiş olduğumuz gerektirme türündeki önermelerin karşıtı ve karşıt tersleri ile ilgili çok sayıda önermeyi üstteki önermelerden elde edebiliriz. Bazılarını bizler elde edelim. Diğerlerini de sizlerin araştırmasına bırakalım.

(i′) (i)'de verilen önermenin karşıt tersinden kolayca "Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisinin birden fazla limiti var ise ilgili dizinin limit yoktur." Örneğin, $\left((-1)^n\right)_0$ dizisi göz önüne alınırsa:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\begin{array}{rcl} 1 & , & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ -1 & , & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

elde edilir ki iki farklı limitle karşılaşılır. Bu ise *limitin tekliği* gereği verilen dizinin limiti olamaz. Yani yakınsak olmayan bir ıraksak dizi olur.

(ii′) (ii)'deki önermenin karşıtı doğru olamaz. Yani, "Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisinin sınırlı olması yakınsak olmasını gerektirmez." Örneğin, $\big((-1)^n\big)_0$ dizisi sınırlıdır fakat yakınsak olmadığını gördük. Diğer taraftan, $\big((-1)^n/n\big)_1$ dizisi de hem sınırlıdır hem de yakınsaktır.

(iii′) (iii)'den "Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisinin sınırlı değilse yakınsak da değildir." Örneğin, $\big(n(-1)^n\big)_1$ dizisi (ne üstten ne de alttan) sınırlı değildir ve yakınsak da olmaz. Gayet açık;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \big\{n(-1)^n\big\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{c} n \text{ , eğer } n \text{ çift ise} \\ -n \text{ , eğer } n \text{ tek ise} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \infty \\ -\infty \end{array} \right.$$

olur ki iş biter.

(x′) (x)'da verilen önermenin karşıtı, yani "$(x_n y_n)_{n_0}$ dizisi yakınsak ise $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri yakınsak olmak zorunda değildir." Örneğin, $\big(x_n \cdot y_n\big)_1 = \big((-1)^n \cdot 1/n\big)_1 = \big((-1)^n/n\big)_1$ dizisinden $(x_n)_1 = \big((-1)^n\big)_1$ dizisi ıraksaktır ama $(y_n)_1 = \big(1/n\big)_1$ yakınsaktır. Sizler de (x)'de verilen önermenin karşıt tersini düşününüz ve örnek veriniz.

Yakınsak olan diziler ile sürekli olan fonksiyonlar arasında önemli bir ilişki vardır. Bu önemli sonuç hem ilerideki bazı derslerininizde hem de bundan sonraki kısımlarda kullanmak durumunda kalacağız. Bu açıdan, aşağıdaki teoremi vermekte fayda görmekteyiz.

Teorem 1.2. Bir f fonksiyonu bir x_0 noktasında sürekli olsun ve bir $(x_n)_{n_0}$ dizisi de x_0 noktasına yakınsasın. O zaman, $\big(f(x_n)\big)_{n_0}$ dizisi de $f(x_0)$ noktasına yakınsar.

İspat. Bildiğimiz gibi, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir ancak veancak her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ saysı vardır ve

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

dır. Ayrıca, $x_n \to x_0$ dır ancak va ancak her $\hat{\epsilon} > 0$ sayısı için öyle bir $N \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı vardır ve öyleki

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n - x_0| < \hat{\epsilon}$$

dır. Buradan ve ilgili fonksiyonun sürekliliğinden kolayca

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n - x_0| < \hat{\epsilon} := \delta \;\Rightarrow\; |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$$

olur ki, bu da $f(x_n) \to f(x_0)$ demektir.

Teoremin birer uygulaması olarak aşağıdaki örenekleri dikkatlice inceleyiniz.

Örnek 1.8.

a) $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1$ dizisinin $x_0 = 0$ noktasına yakınsadığını ve $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun da her reel sayı için sürekli olduğunu, dolayısıyla $x_0 = 0'$da da sürekli olacaktır. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n}\right) = f\Big(\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)\Big) = f(0) = 0$$

olur.

b) $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_1$ dizisinin $x_0 = 1$ noktasına yakınsadığını ve $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun da yine her pozitif reel sayısı için sürekli olduğunundan dolayı $x_0 = 1'$de de sürekli olduğunu yine biliyoruz. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n}{n+1}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right) = f(1) = \ln 1 = 0$$

olur.

Dikkat ederseniz, dizilerdeki limit kavramı fonksiyonlardaki limit kavramını andırmaktadır. Çünkü, dizilerdeki limit kavramını doğal olarak fonksiyonlardaki limit kavramınıyla tanımlayabiliriz. Ykarıdaki bilgiler dahilinde, detaylı araştırmayı sizlere bırakıp ve

"Bir f fonksiyonunun için $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ ise $\lim_{n\to\infty} f(n) = \alpha$ dır."

önermesini vurgulamakla yetiniyoruz. (Bu üstteki önermenin karşıtının doğru olmak zorunda olmadığını biliyoruz. Örneklendiriniz.)

Alıştırmalar 1.6. Teorem 1.2'den yararlanarak aşağıda genel terimi verilen dizilerin karakterlerini araştırınız.

$$\ln\left(\frac{n-\cos n}{n+\sin n}\right),\ \arctan\left(\frac{n\pi}{n+1}\right),\ \cos\left(\pi - \frac{1}{n}\right),\ \sin\left(\frac{n\pi-1}{2n+3}\right),\ \log_5\left(\frac{5n-1}{n+5}\right),\ \sqrt{4+\frac{n}{e^n}},\ e^{\frac{1-n}{n+1}}$$

Dizilerin, zaman zaman ∞'a veya $-\infty$'a yakınsamadan da bahsedilir. Yakınsak olmayan bu tür dizler için gerekli tanımlamaları da vermekte fayda vardır.

Tanım 1.6. Herhangi bir $(x_n)_{n_0}$ (reel) sayı dizisi verilsin. O zaman;

(i) Herhangi bir M reel sayısı verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı var ve bu sayıyı geçen her $n > N$ için $x_n > M$ oluyorsa, ilgili diziye *sonsuz yakınsıyor* denir. Bu tür dizilerin ıraksaklığı nedeniyle bazen *sonsuza ıraksıyor* da denmektedir. Bu durum,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{veya} \quad x_n \to \infty \ \big(n \to \infty \text{ iken}\big)$$

şeklindeki gösterimlerinden biri ile ifade edilir.

(ii) Herhangi bir M reel sayısı verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}_{n_0}$ sayısı var ve bu sayıyı geçen her $n > N$ için $x_n < M$ oluyorsa, ilgili diziye *eksi sonsuz yakınsıyor* denir. Bu tür dizilerin yine ıraksak oluşu nedeniyle bazen *eksi sonsuza ıraksıyor* da denmektedir. Bu durum,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{veya} \quad x_n \to -\infty \ (n \to \infty \text{ iken})$$

şeklindeki gösterimlerinden biri ile ifade edilir.

Bu üstteki heriki tanımda da verilen her M reel sayısına göre ilgili N doğal sayısının varlığından bahsediliyor. Bundan dolayı, aynen dizilerin $N - \epsilon$ ilişkisinde olduğu gibi aranan N doğal sayısı verilen M doğal sayısına göre belirlendiği için ilgili N doğal sayısı $N(M)$ şeklinde de ifade edilebilmektedir.

Örnek 1.9.

a) $x_n = n^2 - 10$ genel terimli (reel) sayı dizisi sonsuza yakınsar (ıraksar). Çümkü, herhangi bir M reel sayısı verildiğinde

$$x_n = n^2 - 10 > M \;\Rightarrow\; n^2 > M + 10 \;\Rightarrow\; n > \sqrt{M+10}$$

eşitsizliği daima doğru olur eğer aranan M reel sayısı $\sqrt{M+10}$ sayısından büyük olacak şekilde seçilirse.

b) $x_n = -3n^3 + 18$ genel terimli (reel) sayı dizisi eksi sonsuza yakınsar (ıraksar). Çümkü, herhangi bir M reel sayısı verildiğinde

$$x_n = -3n^3 + 18 < M \;\Rightarrow\; 3n^3 < 18 - M \;\Rightarrow\; n^3 < 6 - M/3 \;\Rightarrow\; n < \sqrt[3]{6 - M/3}$$

eşitsiliği daima doğru olur, eğer M reel sayısı $\sqrt[3]{6 - M/3}$ sayısından küçük olacak şekilde seçilirse.

Alıştırmalar 1.7. Aşağıda çeşitli (reel sayı) dizileri verilmiştir. Her birinin önce sonsuza ya da eksi sonsuz yakınsar (ıraksar) olduklarını kestiriniz ve doğruluklarını görünüz.

$$5n^3 - 11\ ,\ 6 - 3n^2\ ,\ n - \tfrac{1}{n}\ ,\ \sqrt{n + \tfrac{1}{n}}\ ,\ \tfrac{n^2+1}{n-1}\ ,\ \tfrac{1-n^2}{n+2}\ ,\ 2^n\ ,\ \left(\tfrac{5}{4}\right)^n\ ,\ 2^{n^2}\ ,\ \ln n$$

1.2. Alt ve Üst Limitler

Önceki örneklerimizden bazıları dikkatle incelenirse, bir dizinin limiti olmamasına rağmen alt dizisi konumunda olan dizilerin limitleri söz konusu olabilmektedir. Bu açıdan, sıkça karşılaşabileceğimiz önemli iki kavram olan *limit supremum* ve *limit infinimum* kavramlarını tanıtalım.

Tanım 1.7. Bir $(x_n)_{n_0}$ (reel sayı) dizisi verilsin. Bu durumda,

(i) $(x_n)_{n_0}$ dizisinin *limit supremumu* (veya *üst limiti*) $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\limsup x_n$ veya $\overline{\lim}\, x_n$ şeklinde gösterilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\geq n} x_k\Big) = \lim_{n\to\infty}\big\{\sup x_k : k \geq n\big\}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) $(x_n)_{n_0}$ dizisinin *limit infinimumu* (veya *alt limiti*) $\liminf_{n\to\infty} x_n$, $\liminf x_n$ veya $\underline{\lim}\, x_n$ şeklinde gösterilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{k\geq n} x_k\Big) = \lim_{n\to\infty}\big\{\inf x_k : k \geq n\big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Elbette ki bir dizinin alt limiti veya üst limiti bir gerçel sayıya karşılık gelebileceği gibi herhangi reel sayıya karşılık da gelmeyebilir. Bazen, Genelleiştirilmiş (reel) gerçek sayılardan bahsedilir ve bu sayılar kümesi de $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{0\}$ şeklinde gösterilir. Böylesi bir durumda, üstten sınırlı olmayan bir $(x_n)_{n_0}$ dizisinin limit supremumu doğal olarak $\limsup x_n = \infty$ ve benzeri olarak da alltan sınırlı olmayan bir $(x_n)_{n_0}$ dizisinin limit infimumu da doğal olarak $\liminf x_n = -\infty$ şeklinde ifadeleri sık sık karşılaşılan ifadelerdir. Böylesi durumlarda, genişletilmiş gerçel sayıların göz önüne alındığını ama gerçekte bu sonuçların bir limit olarak kabul edilmediğini, yani $\mathbb{R}$ kümesinde gerçekte ilgili limitlerin olmadığını bilmekteyiz.

Uyarı 1.2. Alt ve üst limitler ile dizinin gerçek limiti arasındaki ilişkiye dikkat etmek gerekir. Bunun için bir $(x_n)_{n_0}$ dizisi verildiğinde, aşağıdaki önermeler daima doğru olur.

(i) $\limsup x_n = r = \liminf x_n$ ve $r \in \mathbb{R}$ ise $\lim x_n = r$ olur.

(ii) $\limsup x_n \neq \liminf x_n$ ise $\lim x_n$ limiti olamaz.

Şimdi, aşağıda verilen üç dizinin limtlerini, limit supremumlarını ve limit infimumlarını belirleyelim.

Örnek 1.10.

a) $(x_n) = \big((-1)^n\big)_0$ (reel sayı) dizisini ele alalım. Bu dizi için, Tanım 1.7'de belirtilen $\big\{x_k : k \geq n\big\} = \big\{(-1)^k : k \geq n\big\}$ kümesinin $\{x_k = (-1)^k : k \geq n\} = \big\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{x_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\big\}$ şeklindeki temel iki küme olduğu açıkça görülür. Buradan da, $\limsup \big\{(-1)^n\big\} = 1$ ve $\liminf \big\{(-1)^n\big\} = -1$ sonuçları açıkça elde edilir. Birden fazla lmitin olması söz konusu olmadığına göre, ilgili diznin limiti yoktur. Diğer bir ifadeyle dizi yakınsak değil, yani ıraksaktır.

b) $(x_n) = \big((-1)^n/n\big)_1$ (reel sayı) dizisini ele alalım. Bu dizi için de yine Tanım 1.7'de belirtilen $\big\{x_k : k \geq n\big\} = \big\{(-1)^k/k : k \geq n \geq 1\big\}$ kümesinin de $\{x_k = (-1)^k/k : k \geq n \geq 1\} = \big\{x_{2n}/(2n) : n \in \mathbb{N}^+\big\} \cup \big\{x_{2n+1}/(2n+1) : n \in \mathbb{N}^+\big\}$ şeklindeki iki esas kümeden ibaret olacaığı göz önüne alınırsa $\sup \big\{(-1)^{2n}/(2n) = 1/(2n) : n \in \mathbb{N}^+\big\} = 1/(2n)$ ve $\inf \big\{(-1)^{2n-1}/(2n-1) = -1/(2n-1) : n \in \mathbb{N}^+\big\} = -1/(2n-1)$ oldukları açıkça görülür. Buradan da $\limsup \big\{(-1)^n/n\big\} = \lim_{n\to\infty} \big(1/(2n)\big) = 0$ ve $\liminf \big\{(-1)^n/n\big\} = lim_{n\to\infty}\big(-1/(2n)\big) = 0$ istenen limitler elde edilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğu, yani dizinin limitin 0 olduğu açıktır.

c) $(x_n) = \big(n^2(-1)^n\big)_1$ (reel sayı) dizisini ele alalım. Bu dizi için de yine Tanım 1.7'de belirtilen $\big\{x_k : k \geq n\big\} = \big\{k^2(-1)^k : k \geq n \geq 1\big\}$ kümesini ve bunun eşiti konumunda olan $\{x_k = k^2(-1)^k : k \geq n \geq 1\} = \big\{x_{2n}(-1)^{2n} : n \in \mathbb{N}^+\big\} \cup \big\{x_{2n+1}(-1)^{2n+1} : n \in \mathbb{N}^+\big\}$ şeklindeki iki esas kümeyle ilişkisi elde edilir. Buradan $\sup \big\{(2n)^2(-1)^{2n} : n \in \mathbb{N}^+\big\} = \big\{2^2, 4^2, 6^2, \cdots\big\} = +\infty$ ve $\inf \big\{(2n-1)^2(-1)^{2n-1} : n \in \mathbb{N}^+\big\} = \big\{-1^2, -3^2, -5^2, \cdots\big\} =$

$-\infty$ olur ki ancak genelleştirişmiş gerçel (reel) sayılar kümesinde $\limsup\{n^2(-1)^n\} = \infty$ ve $\liminf\{n^2(-1)^n\} = -\infty$ şeklinde olur ama bu limitlerin gerçekte olmadıklarını unutmayınız. Ayrıca dizinin limiti yoktur.

ç) Bir $(x_n)_1$ dizisinin genel terimi:

$$x_n = \begin{cases} -\frac{n}{n+1} & , \ n \equiv 0 \ (\text{Mod} \ \ 3) \text{ ise} \\ \frac{n}{n+1} & , \ n \equiv 1 \ (\text{Mod} \ \ 3) \text{ ise} \\ \frac{1}{n} & , \ n \equiv 2 \ (\text{Mod} \ \ 3) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verildiğine göre, ilgili dizinin *limit, alt limit ve üst limit* araştırması yapalım. Dikkatli bir inceleme sonucu, verilen dizinin temel bazda

$$(a_n)_1 = (x_{3n})_1 = \left(-\tfrac{3n}{3n+1}\right)_1 = \left(-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{6}{7}, -\tfrac{9}{10}, \cdots\right),$$

$$(b_n)_1 = (x_{3n-2})_1 = \left(\tfrac{3n-2}{3n-1}\right)_1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{7}{8}, \cdots\right)$$

ve

$$(c_n)_1 = (x_{3n-1})_1 = \left(\tfrac{1}{3n-1}\right)_1 = \left(\tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{8}, \cdots\right)$$

şeklindeki üç alt dizisi söz konusudur. (Neden?) Buna göre;

$$lim_{n\to\infty}\ x_{3n} = -1,\ lim_{n\to\infty}\ x_{3n-2} = 1 \ \text{ ve } \ lim_{n\to\infty}\ x_{3n-1} = 0$$

olduğu kolayca görülür. Buradan, $\underline{lim}\ x_n = -1$ ve $\overline{lim}\ x_n = 1$ olduğu hemen görülür.

d) Bir $(x_n)_0 = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_0$ dizisini ele alalım. Dikkat edilirse:

$$x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} a_n = 0 & , \ n \in \{0,2,4,6,\cdots\} \text{ ise} \\ b_n = 1 & , \ n \in \{1,5,9,\cdots\} \text{ ise} \\ c_n = -1 & , \ n \in \{3,7,11,\cdots\} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ki üç önemli alt dizleri söz konusudur. (Neden?) Buna göre,

$$lim_{n\to\infty}\ a_n = 0,\ lim_{n\to\infty}\ b_n = 1 \ \text{ ve } \ lim_{n\to\infty}\ c_n = -1$$

olup ve buradan $\underline{lim}\ x_n = -1$ ve $\overline{lim}\ x_n = 1$ elde edilir.

Alıştırmalar 1.8. Aşağıda çeşitli (reel sayı) dizilerinin genel terimleri verilmiştir. Her biri için limit, al limit ve üst limit araştırması yapınız. Varsa belirleyiniz.

$$1-(-1)^n \ , \ n-(-1)^n \ , \ \tfrac{1-(-1)^n}{n} \ , \ \tfrac{n+(-1)^n}{n} \ , \ n-\sqrt{n} \ , \ \tfrac{n}{3n-6} \ , \ \tfrac{n}{2n-1}(-1)^n \ , \ 1-\tfrac{(-1)^n}{n} \ ,$$

$$\sin\left((-1)^n\right) \ , \ \cos\left(\pi(-1)^n\right) \ , \ \ln\left(2+(-1)^n\right) \ , \ \sqrt{4+(-1)^n} \ , \ \tfrac{n(-1)^n}{n+(-1)^n} \ , \ \tfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

1.2. Reel (Gerçel) Cauchy Dizileri

Bilindiği gibi yakınsak dizilerin limiti var ve sadece bir tanedir. Dolayısıyla, verilen herhangi bir dizinin limitini belirleme yoluna giderek verilen dizilerin yakınsak olduklarını hakkında bilgilenmekteyiz. Bazen, bir dizinin limitini bulma (belirleme) yoluna gitmeden yakınsaklığı hakkında bilgi verbilmekteyiz ki butür dizilere Cauchy dizisi adı verilir. Şimdi bu dizilerin tanımını öncelikli olarak verelim.

Tanım 1.8. Bir $(x_n)_m$ (reel) sayı dizisi verilsin. Her $\epsilon > 0$ keyfi sayısı verildiğinde öyle bir N doğal sayı var ve bu N sayısını geçen her n, m doğal sayıları için $\big|x_n - x_m\big| < \epsilon$ oluyorsa $(x_n)_m$ dizisine (reel veya gerçel) Cauchy dizisi adı verilir.

Cauchy dizilerinin terimlerinin belli bir doğal sayısından sonraki her bir n ve m doğal sayılarından sonrak dizinin terimler arasındaki farkın istenilen kadar küçük olması gerektiği ilgil tanımdan açıkça görülmektedir. Yakınsak olan bu tür diziler için elbette ki verilen her keyfi $\epsilon > 0$ sayısına göre ilgili ilgili N doğal sayısı söz konusu olduğundan dolayı, çoğu zaman $N = N(\epsilon)$ gösteriminin kullanımı da yine doğaldır ve her $n, m \geq N = N(\epsilon)$ doğal sayıları arasındaki $\big|x_n - x_m\big|$ mesafesi de istenilen kadar olacaktır. Yine, herhangi bir (x_n) dizisinin Cauchy olduğunu ispatlamak için $|x_{n+1} - x_n|$ şeklindeki ardışık terimler arasındaki farkın istenilen kadar küçük olması $|x_n - x_m|$ ifadesinin istenilen kadar küçük olmasını gerektirmeyebilir.

Örnek 1.11.

a) $(x_n) = \big(\sqrt{n}\big)_1$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin ardışık terimleri arasındaki fark, yani her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$|x_{n+1} - x_n| = |\sqrt{1+n} - \sqrt{n}| = \tfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

olmasına rağmen, ıraksak olduğu ve doğal olarak bir Cauchy dizisi olamayacağı açıktır.

b) $x_n = \sqrt{1+n^2}$ genel terimli dizinin ardışık terimleri arasındaki mutlak fark, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |\sqrt{1+(1+n)^2} - \sqrt{1+n^2}| \\ &= \tfrac{\left(\sqrt{1+(1+n)^2}-\sqrt{1+n^2}\right)\left(\sqrt{1+(1+n)^2}+\sqrt{1+n^2}\right)}{\sqrt{1+(1+n)^2}+\sqrt{1+n^2}} \\ &= \tfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2+1}} = \tfrac{n(2+\frac{1}{n})}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right]} \to 1 \end{aligned}$$

olur ki, bu da $|x_{n+1} - x_n|$ mutlak farkın istenildiği kadar küçük olamayacağını gösterir. Zaten, $(x_n) = \big(\sqrt{1+n^2}\big)_0$ dizisinin ıraksak olduğu da açıktır. Doğal olarak, böylesi bir dizinin cauchy dizisi olamaz.

c) $\big(\frac{1}{n}\big)_1$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Çünkü, verilen her keyfi $\epsilon > 0$ sayı için arana doğal sayısı $N = N(\epsilon) > 2/\epsilon$ olacak şekildeki bir seçimle, her $n, m \geq N = N(\epsilon)$ için

$$|x_n - x_m| = |1/n - 1/m| \leq |1/n| + |1/m| < 1/N + 1/N = 2/N < \epsilon$$

olur ki bu da daima doğrudur.

ç) $\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)_1$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Her keyfi $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $N = N(\epsilon) > \sqrt[3]{2/\epsilon}$ koşulunu sağlaycak şekildeki herhangi bir seçim yapılırsa, her $n, m \geq N = N(\epsilon)$ için

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(-1)^n/n^3 - (-1)^n/m^3| \\ &\leq |(-1)^n/n| + |(-1)^m/m| < 1/N^3 + 1/N^3 = 2/N^3 < \epsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği daima olur.

d) $\left(\frac{1}{7^n}\right)_1$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Her keyfi $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $N = N(\epsilon) > \log_7(2/\epsilon)$ koşulunu sağlayacak şekildeki herhangi bir seçim yapılırsa her $n, m \geq N = N(\epsilon)$ için

$$|x_n - x_m| = |1/7^n - 1/7^m| \leq |1/7^n| + |1/7^m| < 1/7^N + 1/7^N = 2/7^N < \epsilon$$

eşitsizliği daima olur.

e) $\left((-1)^n n^3\right)_1$ dizisi bir Cauchy dizisi olamaz. Çünkü ilgili dizi ne üstten ne de alltan sınırlıdır. Böylesi, yani sınırlı olmayan bir dizinin limitinin varlığı zaten söz konusu bile değildir. Yine de, her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $n, m \geq N = N(\epsilon)$ için

$$|x_n - x_m| = |(-1)^n n^3 - (-1)^m m^3| \leq |(-1)^n n^3| + |(-1)^m m^3| < N^3 + N^3 = 2N^3$$

şeklindeki eşitsizlik elde edilir ki, bu da $\epsilon > 0$ sayısı kadar küçük olması ile çelişki oluşturur. O halde, aksiyomumuz, yani "$N = N(\epsilon)$ doğal sayısının varlığının kabulü" doğru olamaz. Bu da işi bitirir.

f) $\left((-1)^n\right)_1$ dizisi bir Cauchy dizisi değildir. Bunun için de verilen dizinin yakınsak olmamaması yeterlidir ama farklı bir mantıkığı ileri sürelim. Bun için de verilen dizinin Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. O zaman, her $\epsilon > 0$ sayısı için bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı kesin vardır. Dolayısıyla, $n = 2N$ ve $m = 2N+1$ doğal sayıları ilgili N doğalsayıları geçen sayılardır. Bu durum da $|x_n - x_m| < \epsilon$ olması gerekir. Halbuki $|x_n - x_m| = |x_{2N} - x_{2N+1}| = |(-1)^{2N} - (-1)^{2N+1}| = |1 + 1| = 2 < \epsilon$ elde edilir ki bu da her $\epsilon > 0$ için doğru değildir. O halde, varsayımımız, yani "Cauchy dizisidir" kabulümüz doğru olamaz. O halde, ilgili dizi Cauchy dizisi olamaz.

Alıştırmalar 1.9. Aşağıda çeşitli dizilere ilişkin genel terimler verilmiştir. Herbirinin birer Cauchy dizisi olup olmadıklarını araştırınız.

$$\cos\left(\tfrac{1}{n}\right),\ \tfrac{\cos n}{n},\ \tfrac{\cos n}{n^2},\ \tfrac{\sin n}{\sqrt{n}},\ \tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ \tfrac{(-1)^n}{5n-1},\ \tfrac{(-1)^n}{\sin n},\ (-1)^n n!,\ 3n,\ n!,$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{n^3}\right),\ \tfrac{1}{n\sqrt{n}},\ \tfrac{(-1)^n}{\ln n},\ \tfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}},\ \tfrac{(-1)^n}{5^n},\ \tfrac{(-1)^n}{n^n},\ \tfrac{(-1)^n}{n!},\ \tfrac{(-1)^n}{5},\ 3(-1)^n,\ n^2,$$

$$\sin\left(\tfrac{1}{n^5}\right),\ \tfrac{\cos n}{n^5},\ \cos n,\ (-1)^n \sin n,\ (-1)^n\sqrt{n},\ (-1)^n(n+1)^n,\ (-3)^n,\ 3^n,\ (-n)^n,$$

$\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\cos\left(\frac{(-1)^1}{n}\right)$, $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{1}{n^3-1}$, $\frac{1}{n^2-1}$, $\frac{3}{5n-4}$, $\frac{(-1)^n}{e^n}$, e^{-n^2} , $e^{1/n}$

Şimdi de Cauchy dizileriyle ilgili teoremlerin bazılarını verelim.

Teorem 1.3. Bir $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ (reel sayı) dizileri ile α ve β reel skaları verilsin. Bu durumda;

(i) $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise sınırlıdır.

(ii) $(x_n)_{n_0}$ yakınsak ise Cauchy dizisidir.

(iii) $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise yakınsaktır.

(iv) $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise her bir $\left(x_{n_k}\right)_{n_0}$ alt dizisi de Cauchy dizisidir.

(v) $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise $|(x_n)_{n_0}|$ dizisi de Cauchy dizisidir.

(vi) $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise $(\alpha x_n)_{n_0}$ de Cauchy dizisidir.

(vii) $(x_n)_{n_0}$ bir Cauchy dizisi ve her $n \geq n_0$ için $x_n \neq 0$ ise $\left(1/x_n\right)_{n_0}$ dizisi de Cauchy dizisidir. (tabii ki $(x_n)_{n_0}$ dizisi sıfıra yakınsamayn bir dizidir.)

(viii) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ Cauchy dizileri ise $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n_0}$ dizisi de Cauchy dizisidir.

(ix) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri Cauchy dizileri ise $(x_n y_n)_{n_0}$ dizisi de Cauchy dizisidir.

(x) $(x_n)_{n_0}$ ve $(y_n)_{n_0}$ dizileri Cauchy dizileri ise $\left(x_n/y_n\right)_{n_0}$ dizisi de Cauchy dizisidir. (Tabii ki $(y_n)_{n_0}$ dizi sıfıra yakınsamayan ve her $n \geq n_0$ için $y_n \neq 0$ olan bir dizidir.)

Şimdi bazılarını ispatlayıp diğerlerini de szilerin araştırmasına bırakalım.

İspat.

(i) Bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim ve kolaylık olsun diye ilgili $\epsilon = 1$ seçelim. O zaman, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n, m \geq N$ doğal sayısı için, $|x_n - x_m| < \epsilon = 1$ omak durumundır. Bu ise, her $n \geq N$ için $|x_n - x_{N+1}| < 1$ olmasını gerektirir. Buradan,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \;\Rightarrow\; x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1$$

elde edilir. Eğer

$$b = \max\{x_0, x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1\} \;\; ve \;\; a = \min\{x_0, x_1, ..., x_N, x_{N+1} - 1\}$$

olarak seçersek, her $n \geq N$ için, $a \leq x_n \leq b$ elde edilir ki, bu da (x_n) dizisinin sınırlı olmasıdır.

(ii) $(x_n)_{n_0}$ dizisi yakınsak olsun. Bu durum da $(x_n)_{n_0}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $(x_n)_{n_0}$ dizisi yakınsak olduğundan dolay $x_n \to x_0$ olacak şekilde bir x_0 reel sayısı vardır. İlgili tanım gereği, verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşın daima (en az) bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı var ve bu sayıyı geçen her $n \geq N$ için $|x_n - x_0| < \epsilon$ dır.

Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |x_n - x_0 + x_0 - x_m| \\ &= |(x_n - x_0) - (x_m - x_0)| < |x_n - x_0| + |x_m - x_0| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı bitirir.

(iv) Bir (x_n) dizisi Cauchy dizisi olsun. Teorem 1.3-(i)'ye göre (x_n) dizisi sınırlıdır. Her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi olduğuna göre, (x_n) dizisinin de yine bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Burada, $x_{n_k} \to a$ olsun. O zaman, $x_n \to a$ olduğunu görmemiz gerekir. Her keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. (x_n) dizisi Cauchy dizisi olduğundan dolayı öyle bir N doğal sayısı vardır ve her $n, m \geq N$ doğal sayısı için $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ olmak zorundadır. n_k doğal sayısı $n_k \geq N$ ve $|x_{n_k} - a| < \epsilon/2$ olacak şekilde ve yeteri kadar büyük seçilebilir. Bu durumda, her $n \geq N$ için

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Yani, $x_n \to a$ olur.

(vi) Bir (x_n) dizisi Cauchy dizisi olsun ve α skaları verilsin. (x_n) dizisi Cauchy dizisi olduğundan dolayı, her keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ doğal sayısı var ve bu sayıyı geçen her $n, m \geq N$ sayısı için $|x_n - x_m| < \epsilon$ dır. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$|\alpha x_n - \alpha y_n| = \big|\alpha\big(x_n - y_n\big)\big| = |\alpha||x_n - y_n| < \tfrac{\epsilon}{|\alpha|}$$

elde edilir. O halde, verilen N doğalsayısı $N = N\big(\epsilon/|\alpha|\big)$ şeklindeki doğal sayı seçilirse iş biter.

Teorem 1.3'den elde edilebilinecek çok sayıda hem önerme hem de teorem mevcuttur. Önceden düşündüğümüz gibi, her bir teoremin karşıtından ve karşıt tersinden hepsi ortaya çıkarılabilinir. Bazıları aşağıda verilmiş olup, diğerlerinin de belirlenmesi (ve örneklendirilmesi) sizlerin araştırmasına bırakılmıştır.

Sonuç 1.2.

(i) (i)'nin karşıt göz önüne alınırsa: " Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisi sınırlı ise Cauchy dizisidir." önermesi doğru olmak zorunda değildir. Örneğin, $x_n = (-1)^n$ genel terimli dizisinin sınırlı olduğunu ve Cauchy dizisi olmadığını biliyoruz.

(ii) (i)'nin karşıt tersi göz önüne alınırsa: "Bir $(x_n)_{n_0}$ dizisi sınırlı deeğil ise Cauchy dizisi değildir." önermesi daima doğrudur. (Neden?)

(iii) (ii)'nin karşıt göz önüne alınırsa: " Bir $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi ise yakınsaktır." önermesinin doğru olduğu ispatlanmıştı.

(iv) (ii)'nin karşıt tersi göz önüne alınırsa: "Bir $(x_n)_{n_0}$ Cauchy dizisi değilse yakınsak da değildir." önermesinin daima doğru olduğunu zaten biliyoruz. (Neden?)

1.3. Özel Tanımlı Bazı Diziler

Çok sayı tanımlanmış bilindik diziler vardır. Şimdi bazıları hatırlayalım.

Tanım 1.9.

(i) $(x_n)_1$ (reel sayı) dizisinin genel terimi:

$$x_n = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}$$

şeklinde olan dizilere *harmonik dizi* adı verilir. Bu tür diziler ıraksak dizilerdir. Doğal olarak Cauchy dizisi de olamaz. Farklı bir araştırma yolu olarak ilgili dizinin "yakınsak" olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $(x_{2n})_1$ dizisi $(x_n)_1$ dizisinin bir alt dizisi olup her ikisinin de limitler s olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}\right) \\
&\geq \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} + x_n,
\end{aligned}$$

yani $x_{2n} \geq \frac{1}{2} + x_n$ eşitsizliği elde edilir. Burada, hem $x_n \to s$ hem de $x_{2n} \to s$ olması gerektiği (kabul ettik çünkü) göz önüne alınır ve limite geçilirse, doğru olmayan bir önerme karşılaşılır. Bu da, yani varsayımımız olan "(x_n) dizisinin yakınsaklığı" ile çelişki elde edilir. Bu da işi bitirir.

(ii) Bir dizinin ilk birkaç terimi verilir ve diğer terimleri de verilenlerden yararlanarak bulunur. Bu tür dizilere rekürsif dizi adı verilir. Örneğin; 1. terimi $x_1 = a \in \mathbb{R}$ olarak verilsin. Dizinin $x_2, x_3, x_4, \cdots$ terimleri de her $n \in \mathbb{N}_2$ için $x_n = b + x_{n-1}$ şeklindeki genel terimle oluşturulması istenirse, ilgili (rekürsif) dizi

$$\begin{aligned}
\left(x_n\right)_1 &= \left(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\right) \\
&= \left(a, a+b, (a+b)+b, [(a+b)+b]+b, \cdots\right) \\
&= \left(a, a+b, a+2b, a+3b, \cdots, a+(n-1)b, \cdots\right)
\end{aligned}$$

şeklindeki dizi olacaktır. Sizler de aşağıda rekürsif formda verilen dizilerin ilk beş terimini bulunuz.

a) $n \in \mathbb{N}_2$, $x_1 = 2$, $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$

b) $n \in \mathbb{N}_3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$

c) $n \in \mathbb{N}_3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}$

ç) $n \in \mathbb{N}_2$, $x_1 = 2$, $x_n = 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$

d) $n \in \mathbb{N}_3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_n = \sqrt{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-2}}}$

(iii) Her bir ardışık terimleri arasındaki fark hep aynı ise bu diziye *aritmetik dizi* adı verilir. Olayı matematiksel boyutta ve $m = 1$ seçimiyle ele alırsak:

$$\big(x_n\big)_1 = \big(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\big)$$

şeklindeki bir dizi her $n \in \mathbb{N}_1$ için $x_{n+1} - x_n = d \in \mathbb{R}$ ise (x_n) dizisine *aritmetik dizi* ve r sayısına da aritmetik dizinin *aritmetik farkı* adları verilir. Buna göre, ilgili dizinin genel terimini belirleyelim:

1. terim : x_1
2. terim : $x_2 = x_1 + d$
3. terim : $x_3 = x_2 + d = x_1 + d + d = x_1 + 2d$
4. terim : $x_4 = x_3 + d = x_1 + 2d + d = x_1 + 3d$

$\vdots$

n. terim : $x_n = x_{n-1} + d = x_1 + (n-2)d + d = x_1 + (n-1)d$

elde edilir ki her $n\mathbb{N}_1$ için $x_n = x_1 + (n-1)d$ şeklindeki genel terimli bir dizi olur. Bu tür dizilerin yakınsak olmadıkları ve doğal olarak Cauchy dizileri de olmadıkları açıktır. Aaşagıda verilen bilgiler dahilinde, ilgili aritmetik dizilerin genel terimlerini belirleyiniz.

$$x_{10} = 3 \;,\; x_{20} = 56 \;;\; x_{12} = -5 \;,\; d = -3 \;;\; x_1 = 3 \;,\; d = 5 \;;\; x_{18} = 1/3 \;,\; d = 1/5$$

(iv) Her bir ardışık terimlerinin oranı hep aynı ise bu diziye geometrik dizi adı verilir. Bu diziyi de matematiksel boyutta ele alırsak:

$$\big(x_n\big)_1 = \big(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\big)$$

şeklindeki bir dizi her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_{n+1}/x_n = r \in \mathbb{R}$ ise (x_n) dizisine *geometrik dizi* ve r sayısına da geometrik dizinin *geometrik oranı* adları verilir. Buna göre, ilgili dizinin genel terimini belirleyelim:

1. terim : x_1
2. terim : $x_2 = rx_1$
3. terim : $x_3 = rx_2 = r(rx_1) = r^2x_1$
4. terim : $x_4 = rx_3 = r(r^2x_1) = r^3x_1$

$\vdots$

n. terim : $x_n = rx_{n-1} = \cdots = r^{n-1}x_1$

elde edilir ki her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n = r^{n-1}x_1$ şeklindeki genel terimli bir dizi olur. Aşagıda verilen bilgiler dahilinde, ilgili geometrik dizilerin genel terimlerini belirleyiniz.

$$x_1 = 3\ ,\ x_7 = 28\ ;\ x_{10} = 5\ ,\ r = 1/3\ ;\ x_1 = 1/3\ ,\ r = 5\ ;\ x_{12} = 3\ ,\ r = 2/3$$

Örnek 1.7-(v)'de belirttiğimiz gibi, geometrik dizilerin hem yakınsaklığı hem de ıraksaklığı söz konusudur. Bu durumu, tekrar aşağıdaki gibi uyarı şeklinde vurgulanmakta fayda görüyoruz. Doğruluklarının $N - \epsilon$ ilişkisiyle tekrar görülmesi sizlere bırakılmıştır.

Uyarı 1.3. $(x_n)_1$ geometrik dizisinin genel teriminin limitinin incelenmesi:

$$x_n = r^n \begin{cases} \text{Yakınsaktır}\ , & \text{eğer } |r| < 1 \text{ ise} \\ \text{Iraksaktır}\ , & \text{eğer } |r| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Doğal olarak;

$$\lim_{n\to\infty} e^n = \infty\ ,\ \lim_{n\to\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{5^n} = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} \pi^{-n} = 0\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}(0,1)^n = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}(0,01)^n = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}(1,1)^n = \infty\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{4}{3}\right)^n = \infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}(-0,1)^n = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}(-1,01)^n = \mp\infty\ ,\ \lim_{n\to\infty} \pi^n = \infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left(\ln 2\right)^n = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left(\ln 3\right)^n = \infty\ \cdots$$

şeklinde olur.