1 .3. C'nin Bazı Topolojik Özellikleri

Şimdi kompleks sayıların kümesinde bazı topolojik yapıları ele alalım.

Tanım 1.8. Herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\mathcal{A}$ kümesinin tümleyeni $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}^c$ veya $\mathcal{A}^t$ şeklinde gösterilir ve

$$\mathcal{A}' = \mathbb{C} - \mathcal{A} = \Big\{ z \in \mathbb{C} : z \notin \mathcal{A} \Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.9. Herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Bu sayının açık-ϵ-komşuluğu

$$\big\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon \quad (\epsilon > 0) \big\}$$

şeklindeki kümey ile tanımlanır. Bu kümeyi $U_\epsilon(z_0)$ notasyonu ile gösterelim. Zaman zaman ilgili küme z_0 merkezli ϵ yarıçaplı açık disk şeklinde de anılır.

Tanım 1.10. Herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Bu sayının kapalı-ϵ-komşuluğu

$$\big\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon \quad (\epsilon > 0) \big\}$$

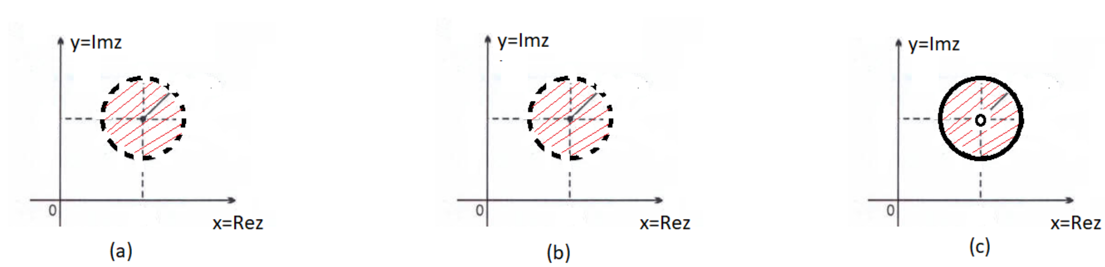
Bu kümeyi $\overline{U}_\epsilon(z_0)$ notasyonu ile gösterelim. Böylesi bir küme ise z_0 merkezli ϵ yarıçaplı kapalı disk şeklinde anılır.

Tanım 1.11. Herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Bu sayının açık-delinmiş-ϵ-komşuluğu

$$\big\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon \quad (\epsilon > 0) \big\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu kümeyi de $\overset{*}{U}_\epsilon(z_0)$ şeklinde gösterelim. Yine, bu küme zaman zaman z_0 merkezli ϵ yarıçaplı delinmiş açık disk şeklinde de anılır.

Herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısının (noktasının), grafik (a)'da $U_\epsilon(z_0)$, grafik (b)'de $\overline{U}_\epsilon(z_0)$ ve grafik (c)'de de $\overset{*}{U}_\epsilon(z_0)$ komşulukların kompleks düzlemdeki gösterimleri verilmiştir.



Bilindiği üzere, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde hem ∞ hem de $-\infty$ için komşuluk kavramı söz konusudur. Fakat, $\mathbb{C}$ kümesinde karşılaştırma sadece modül kavramı ile anlam kazındığından dolayı, sadece ∞'un komşuluğundan bahsedilmektedir. Buna göre, ∞'un herhangi bir $r-$açık-komşuluğu olan $U_r(\infty)$ $(r > 0)$ kümesi, yani

$$\left\{z \in \mathbb{C} : |z| > r \quad (r > 0)\right\}$$

şeklinde tanımlanan orjin merkezli $r-$yarıçaplı bir çemberin dışını ifade eder.

Tanım 1.12. Boş kümeden farklı herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin ve $z_0 \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer, z_0 noktasının $U_\epsilon(z_0) \subset \mathcal{A}$ olacak şekilde (en az) bir $U_\epsilon(z_0)$ komşuluğu var (bulunabiliyor) ise, z_0 noktasına $\mathcal{A}$ kümesinin bir iç noktası adı verilir.

Bazen, üstteki tanıma denk olarak bu tanım aşağıdaki şeklinde de tanımlanır.

Eğer, z_0 noktasının $U_\epsilon(z_0) \subset \mathcal{A}$ olacak şekilde (en az) bir $\epsilon > 0$ sayısı var (bulunabiliyor) ise, z_0 noktasına $\mathcal{A}$'nın bir iç noktasıdır denir.

Bir $\mathcal{A}$ kümesinin iç noktalarının oluturduğu küme genelikle İç$(\mathcal{A})$ veya $\mathring{\mathcal{A}}$ şeklinde gösterilir. O halde,

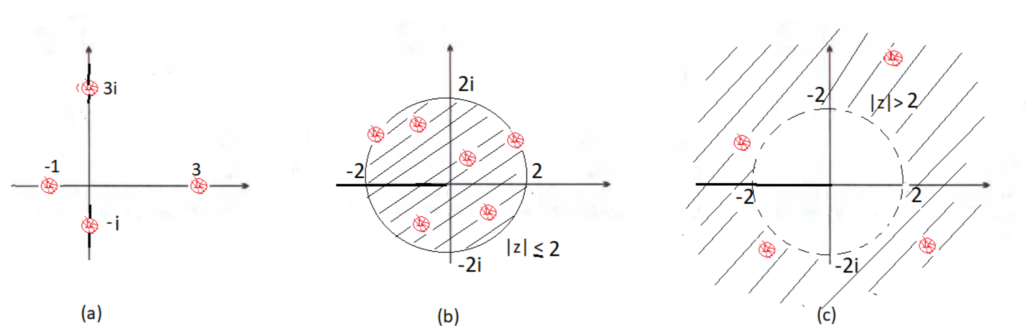
$$\mathring{\mathcal{A}}= \left\{z \in \mathcal{A} : \ni \exists\, \epsilon\ (\epsilon > 0) \ \ni\ U_\epsilon(z_0) \subset \mathcal{A}\right\}$$

olacaktır.

Tanım 1.13. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}$ her bir elemanı bir iç nokta ise $\mathcal{A}$ kümesine ($\mathbb{C}'$de) açık küme veya (kısacası) açıktır denir.

Açık küme tanımından, "$\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi açıktır ancak ve ancak $\mathring{\mathcal{A}}= \mathcal{A}$ dır." olacağı açıktır.

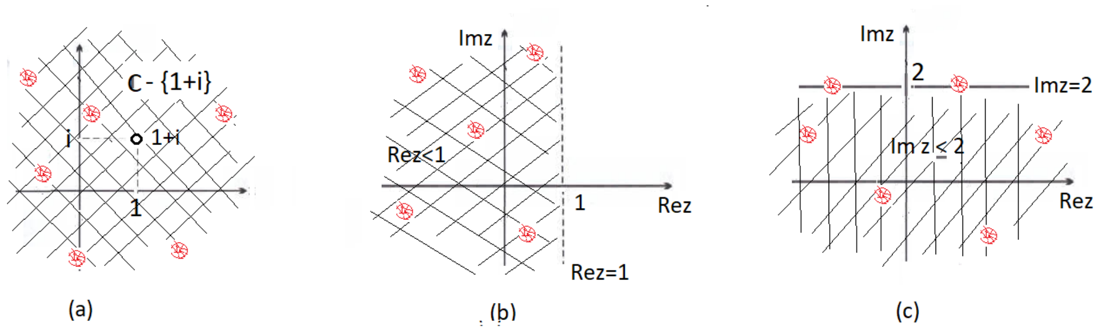
Örnek 1.8. Aşağıda $\mathbb{C}$ düzleminde çeşitli kümelerin grafikleri verilmiştir. Grafik (a)'da verilen küme $\mathcal{A} = \{-i, -1, 3i, 3\}$ kümesi, grafik (b)'de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ ve grafik (c)'de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ kümesidir.



Tanım 1.14. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}'$ kümesi ($\mathbb{C}'$de) açık bir küme ise $\mathcal{A}$ kümesine ($\mathbb{C}'$de) kapalı küme veya (kısacası) kapalıdır denir.

Kapalı küme tanımından, “$\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi kapalıdır ancak ve ancak $\mathcal{A}'$ kümesi ($\mathbb{C}$’de) açıktır.” olacağı açıktır.

Örnek 1.9. Aşağıda $\mathbb{C}$ düzlemindeki çeşitli kümelerin grafikleri verilmiştir. Grafik (a)’da verilen küme $\mathcal{A} = \{1+i\}$ nokta kümesinin tümleyeni, grafik (b)’de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \geq 1\}$ kümesinin tümleyeni ve grafik (c)’de $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 2\}$ kümesinin tümleyeni olan kümelerdir.



Uyarı 1.3. Aşağıdaki uyarılara lütfen dikkat ediniz.

(i) Bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi açık değil ise kapalı olmak zorunda değildir. Örneğin, nokta kümesinden oluşan bir $\mathcal{A} = \{i\}$ kümesinin tümeleyeni olan $\mathcal{A}' = \mathbb{C} - \{i\}$ kümesi ($\mathbb{C}$’de) açık olmasına rağmen $\mathcal{A} = \{i\}$ kümesi ($\mathbb{C}$’de) açık bir küme olmayıp aksine kapalı bir kümedir.

(ii) Bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi kapalı değil ise açık olmak zorunda da değildir. Örneğin, $\mathcal{A} = \big\{z \in \mathbb{C} : 1 < \Re e(z) \leq 4\big\}$ kümesinin tümleyeni olan $\mathcal{A}' = \big\{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \leq 1 \ veya\ \Re e(z) > 4\big\}$ kümesi açık değildir, dolayısıyla $\mathcal{A}$ kümesi kapalı olamaz. Butür kümeler “ne açıktır ne de kapalıdır” şeklinde ifade edilen kümelerdir.

Aşağıdaki teoremler temel tanımlar paralelinde ispatlanabilir. Gerekli araştırmayı sizlere bırakıyoruz.

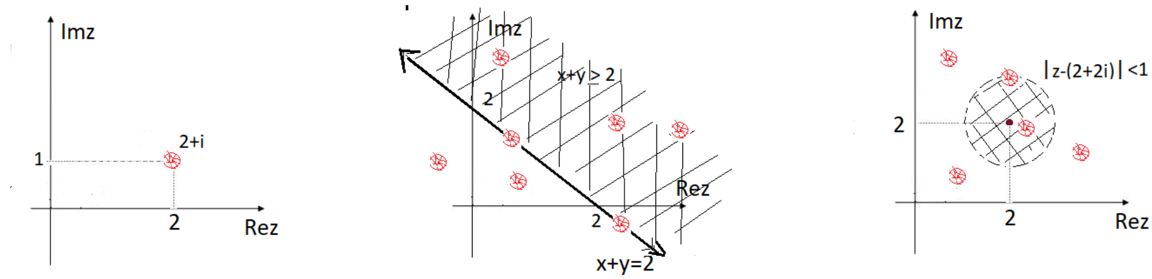
Tanım 1.15. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için $U_\epsilon(z) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ve $U_\epsilon(z) \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ ise, z’ye $\mathcal{A}$’nın bir sınır noktası denir.

Bir $\mathcal{A}$ kümesinin bütün sınır noktalarının oluşturduğu küme genellikle $\partial(\mathcal{A})$ veya $\partial\mathcal{A}$ şeklinde gösterilir. O halde,

$$\partial(\mathcal{A}) = \Big\{z \in \mathbb{C} : \ \forall\ \epsilon\ (\epsilon > 0)\ \ni\ U_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\ ve\ U_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset\Big\}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 1.10. Aşağıda $\mathbb{C}$ düzleminde çeşitli kümelerin grafikleri verilmiştir. Grafik (a)’da verilen küme $\mathcal{A} = \{2+i\}$ nokta kümesi, grafik (b)’de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : \Re ez + \Im mz \geq 2\}$ ve grafik (c)’de $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1+i)| < 1\}$ kümesidir.



(a) (b) (c)

Tanım 1.16. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Bu $\mathcal{A}$ kümesinin kapanışı $\overline{\mathcal{A}}$ şeklinde gösterilir ve $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \partial(\mathcal{A})$ şeklinde tanımlanır. Bu tanım bazen,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0 \ \ni \ \mathcal{U}_\epsilon(z) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$$

şeklinde de tanımlanır.

Örnek 1.11. Örnek 1.10'da verilen kümelere göre her üç kümenin kapanışlarını bulalım.

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \partial(\mathcal{A}) = \{2+i\} \cup \{2+i\} = \{2+i\},$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial(\mathcal{B}) = \{z \in \mathbb{C} : \Re ez + \Im mz = \geq 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Re ez + \Im mz = 2\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : \Re ez + \Im mz \geq 2\}$$

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \partial(\mathcal{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < 1\} \cup \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| = 1\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| \leq 1\}$$

şekilindeki kümeler olacaktır.

Tanım 1.17. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\mathcal{U}_\epsilon(z)$ kümesi $\mathcal{A}$'nın z'den başka en az bir elemanını içeriyor ise z'ye $\mathcal{A}'$nın bir yığılma noktasıdır veya limit noktasıdır denir.

Yani,

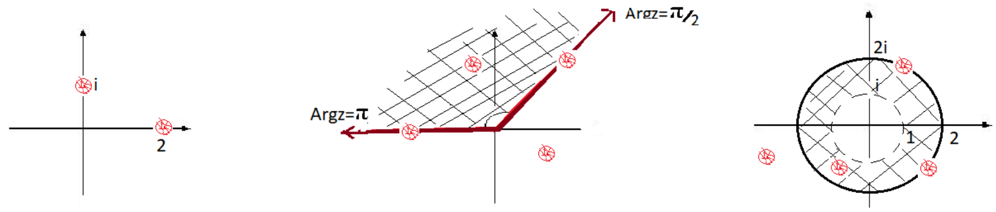
$z \in \mathbb{C}$ noktası $\mathcal{A}'$nın bir yığılma noktasıdır anacak ve ancak $\epsilon > 0$ için $\overset{\star}{\mathcal{U}}_\epsilon(z) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ dır.

Bir $\mathcal{A}$ kümesinin yığılma noktalarının (veya limit noktalarının) oluşturduğu küme genellikle $\widetilde{\mathcal{A}}$ şeklinde gösterilir. Buna göre, $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ şeklindeki bir küme için $\widetilde{\mathcal{A}}$ kümesi,

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \left\{\mathbb{C} : \ \forall \ \epsilon > 0 \ \ni \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\right\}$$

şeklindeki küme olur.

Örnek 1.12. Aşağıda $\mathbb{C}$ düzleminde çeşitli kümelerin grafikleri verilmiştir. Grafik (a)'da verilen küme $\mathcal{A} = \{i, 2\}$ kümesi, grafik (b)'de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : \pi/4 < Arg(z) \leq \pi\}$ ve grafik (c)'de $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 4\}$ kümesidir.



(a) (b) (c)

Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.7. $\mathcal{A}$ kümesi $\mathbb{C}$'de kapalıdır ancak ve ancak $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ dır.

İspat.

$\mathcal{A}$ kümesi $\mathbb{C}$'de kapalı olsun. Bu durumda $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $\widetilde{\mathcal{A}} = \emptyset$ ise ispat biter. Bunun için $\widetilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ ve $\widetilde{\mathcal{A}} \not\subset \mathcal{A}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, öyle bir $z_0 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ vardır öyleki $z_0 \in \mathcal{A}$ dır. Bu ise $z_0 \in \mathbb{C} - \mathcal{A}$ olmasını gerektirir. $\mathcal{A}$ kümesi kapalı olduğundan dolayı $\mathbb{C} - \mathcal{A}$ açıktır. Bu durumda da öyle bir $\epsilon > 0$ vardır öyleki $\mathcal{U}_\epsilon(z_0) \subset \mathbb{C} - \mathcal{A}$ dır. O halde, $\mathcal{U}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ olur. Bu da $\overset{\star}{\mathcal{U}}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ olmasını gerektirir. Bu ise, $z_0 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ olması ile çelişki oluşturur. O halde, $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ olmak durumundadır.

Şimdi de $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ olduğunu kabul edip, $\mathcal{A}$ kümesinin kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için de $\mathbb{C} - \mathcal{A}$ nın açık olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

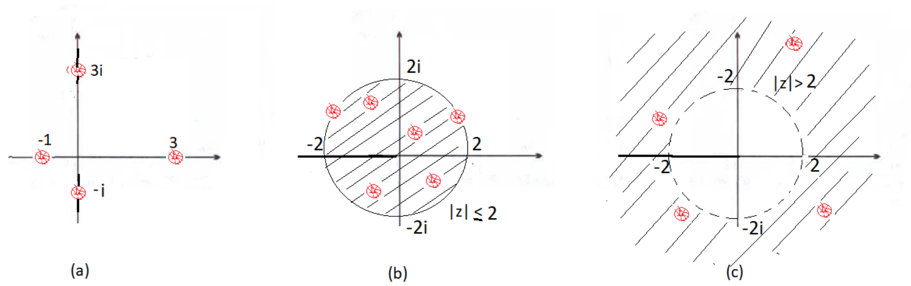
Eğer $\mathbb{C} - \mathcal{A} = \emptyset$ ise ispat biter. Bunun için, $\mathbb{C} - \mathcal{A} \neq \emptyset$ ve $z_0 \in \mathbb{C} - \mathcal{A} = \emptyset$ olsun. O zaman, $z_0 \notin \mathcal{A}$ olur. Bu ve $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ olduğundan dolayı, $z_0 \notin \widetilde{\mathcal{A}}$ olur. Buna göre, öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır öyleki $\overset{\star}{\mathcal{U}}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} =$ olur. $z_0 \notin \widetilde{\mathcal{A}}$ ve $\overset{\star}{\mathcal{U}}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ oldur ki bu da $\mathcal{U}_\epsilon(z_0) \subset \mathbb{C} - \mathcal{A}$ olması demktir. O halde, $z_0 \in \mathbb{C} - \mathcal{A}$ bir iç nokta olması demektir. Bu durum her z_0 için de geçerli olacağına göre, $\mathbb{C} - \mathcal{A}$ kümesinin her elamanı da birer iç noktası olmasına götürür. O halde, $\mathbb{C} - \mathcal{A}$ açıktır dolayısıyla $\mathcal{A}$ kapalı olur.

Tanım 1.18. Boş kümeden farklı herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in \mathcal{A}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $\mathcal{U}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} = \{z_0\}$ oluyor ise z_0'ye $\mathcal{A}'$nın bir ayrık noktasıdır veya singüler noktasıdır denir.

Yani, $z_0 \in \mathcal{A}$ noktası $\mathcal{A}$'nın ayrık noktasıdır ancak ve ancak her $\epsilon > 0$ için $\mathcal{U}_\epsilon(z_0) \cap \mathcal{A} =$

$\{z_0\}$ dır.

Örnek 1.13. Aşağıda $\mathbb{C}$ düzlemşnde çeşitli kümelerin grafikleri verilmiştir. Grafik (a)'da verilen küme $\mathcal{A} = \{-i, -3, 3i\}$ kümesi, grafik (b)'de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ ve grafik (c)'de $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ kümesidir. şeklinde tanımlanan orjin merkezli $r-$yarıçaplı



bir çemberin dışını ifade eder.

Tanım 1.19. $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ olsun ve herhangi bir $\hat{\mathcal{S}} \subset \mathbb{S}$ kümesi verilsin.

(i) Eğer $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \cap \mathbb{S}$ olacak şekilde bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ açık kümesi var ise $\hat{\mathcal{S}}$ kümesine $\mathbb{S}$ kümesinde bir açık küme veya kısaca açıktır denir.

(ii) Eğer $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \cap \mathbb{S}$ olacak şekilde bir $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kapalı kümesi var ise $\hat{\mathcal{S}}$ kümesine $\mathbb{S}$ kümesinde bir kapalı küme veya kısaca kapalıdır denir.

O halde, $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ olmak üzere herhangi bir $\hat{\mathcal{S}} \subset \mathbb{S}$ kümesi için,

" $\hat{\mathcal{S}}$, $\mathbb{S}$'de açıktır $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \cap \mathbb{S}$ olacak şekilde $\mathbb{C}$'de bir açık $\mathcal{A}$ kümesi vardır."

ve

" $\hat{\mathcal{S}}$, $\mathbb{S}$'de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \cap \mathbb{S}$ olacak şekilde $\mathbb{C}$'de kapalı bir $\mathcal{A}$ kümesi vardır."

Örnek 1.14. $\hat{\mathcal{S}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kümesi $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}$ kümesinde açıktır ve $\hat{\mathcal{S}} = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \leq 1\}$ kümesi de $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \leq 4\}$ kümesinde kapalıdır.

Tanım 1.20. $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{S} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ olacak şekilde ayrık ve açık $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{G}$ kümeleri bulunamıyor ise $\mathcal{S}$ kümesine bağlantılı bir küme veya kısacası bağlantılıdır denir. Bahsi geçen kümeler var (bulunabiliyor) ise o kümeye bağlantılı olmayan veya kısaca bağlantısız küme adı verilir.

Yani, " Boş kümeden farklı, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan kümeye bağlantılı küme adı verilir."

Örnek 1.15. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $\{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \geq 1\}$ kümeleri ($\mathbb{C}$'de) bağlantılıdır. Çünkü, bu kümeler **ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde asla yazılamaz**. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \ veya\ |z| > 4\}$ ve $\{z \in \mathbb{C} : |\Im m(z)| > 2\}$ kümeleri ise bağlantılı değildir. Çünkü, bu **iki küme de ayrık ve açık olan iki kümenin birleşimi şeklinde yazılabilir.** (Bu kümeleri belirleyiniz.)

Tanım 1.21. $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{S}$'deki herhangi iki nokta yine $\mathcal{S}$'de bulunan bir eğri ile birleştirilebilir ise $\mathcal{S}$ kümesine ($\mathbb{C}$'de) yol bağlantılıdır denir. İlgili şartı sağlayan eğrilerden (fonksiyonlardan) bir tane bile bulunamıyor ise o kümeye yol bağlantılı olmayan veya kısaca yol bağlantısız küme adı verilir.

Örnek 1.16. $\{z \in \mathbb{C} : 4 < |z| \leq 9\}$ kümesi yol bağlantılıdır. Çünkü, bu kümede seçilen her iki noktayı birbirine bağlayan ve bu kümede bulunan sonsuz tane eğri vardır. Fakat $\{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \neq 0\}$ kümesi yol bağlantılı değildir. Çünkü, bu küme kompleks düzlemden reel eksenin çıkarılmasıyla oluşan küme olup, ilgili noktalardan biri reel eksenin üstünde diğeri de reel eksenin altında seçilirse, bu noktaları birleştiren sonsuz tane eğri vardır ama bunların hiçbiri ilgili kümede bulunmaz.

O halde,

" $\mathcal{S}$, $\mathbb{C}$'de yol bağlantılıdır ancak ve ancak $\mathcal{S}$'deki herhangi iki nokta yine $\mathcal{S}$'de bulunan bir eğri ile birleştirilir."

Tanım 1.22. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}$ kümesi bağlantılı ve açık ise $\mathcal{A}$ kümesine ($\mathbb{C}$'de) bir bölge adı verilir.

Örnek 1.17. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| < 9\}$ kümesi hem açık hem de bağlantılı olup ($\mathbb{C}$'de) bir bölgedir. Fakat $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| = 9\}$ kümesi bağlantılı olmasına rağmen açık olmadığı için ($\mathbb{C}$'de) bir bölge değildir.

Tanım 1.23. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer her A için $|z| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $\mathcal{A}$ kümesine ($\mathbb{C}$'de) sınırlı bir küme veya kısacası sınırlıdır denir.

Örnek 1.18. $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \Re e(z) \leq 4\}$ kümesi ($\mathbb{C}$'de) sınırlı değildir. Fakat $\{z \in \mathbb{C} : |\Re e(z)| < 1 \ ve \ |\Im m(z)| \leq 4\}$ kümesi ($\mathbb{C}$'de) sınırlıdır.

Tanım 1.24. $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi sınırlı ve kapalı ise $\mathcal{A}$ kümesine ($\mathbb{C}$'de) kompakt (tıkız) küme vaya kısacası kompakttır (tıkızdır) denir.

Örnek 1.19. $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 9\}$ kümesi sınırlıdır ama kapalı olmadığı için kompakt değildir. Fakat $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$ kümesi hem sınırlı ve kapalıdır dolayısıyla ($\mathbb{C}$'de) kompakttır.

Literatürde Bolzano-Weierstrass Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremi de verip ispatını da sizlerin araştırmasına bırakalım.

Tanım 1.25. $\mathbb{C}$'de her sınırlı ve sonsuz elemanlı bir kümenin en az bir yığılma noktası vardır.

Örnek 1.20. $\mathcal{A} = \{i\}$ kümesi sonlu bir kümedir. $\widetilde{\mathcal{A}} = \emptyset$ olup, bu küme üstteki teoremin hipotezine uygun olmadığı için hüküm de sağlamamıştır. Fakat $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ kümesi hem sınırlıdır ve hem de sonsuz elamanlıdır ve $\widetilde{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ dır.

Alıştırmalar 1.8.

i) $\mathbb{C}$ kümesindeki her açık komşuluk bir açık kümedir. Gösteriniz.

ii) Aşağıda verilen önermeleri önce ispatlayınız sonra da örneklendiriniz.

a) $\mathbb{C}$'de açık kümelerin keyfi birleşimleri açık bir kümedir.

b) $\mathbb{C}$'de açık kümelerin sonlu kesişimleri açık bir kümedir.

c) $\mathbb{C}$'de kapalı kümelerin sonlu kesişimleri kapalı bir kümedir.

ç) $\mathbb{C}$'de kapalı kümelerin keyfi kesişimleri kapalı bir kümedir.

d) $\partial(\mathcal{A})$ kapalı bir kümedir.

e) $\overline{\mathcal{A}}$ kapalı bir kümedir.

f) $\partial(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ kapalı bir kümedir.

g) $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ ise $\mathcal{A}$ kapalı bir kümedir.

iii) Aşağıda verilen önermelerin doğruluklarını araştırınız. Farklı örnekler veriniz.

a) $\mathbb{C}$'de her bağlantılı küme yol bağlantılı olur mu? Neden?

b) $\mathbb{C}$'de her yol bağlantılı küme bağlantılı olur mu? Neden?

c) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümeleri bağlantılı ise $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ kümesi de bağlantılı olur mu? Neden?

ç) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümeleri bağlantılı ise $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ kümesi de bağlantılı olur mu? Neden?

d) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümeleri yol bağlantılı ise $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ kümesi de yol bağlantılı olur mu? Neden?

e) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ kümeleri yol bağlantılı ise $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ kümesi de yol bağlantılı olur mu? Neden?

iv) Aşağıda kompleks düzlemde çeşitli kümeler verilmiştir. Önce herbirinin grafiğini ilgili düzlemde çiziniz. Sonra da herbirinin açık, kapalı, sınırlı, bölge, kompkat, bağlantılı ve yol bağlantılı olup olmadıklarını araştırınız.

$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 4 \textit{ veya } |z| \leq 2\}$,

$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\} \cup \{3i, -5\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) \geq -1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |\Im m(z)| = 2\}$,

$\{z \in \mathbb{C} : -\pi < Arg(z) \leq \pi/2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |Arg(iz)| \geq \pi/2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) \neq 1\}$

$\{z \in \mathbb{C} : Arg(-z) = \pi\}$, $\{z \in \mathbb{C} : Arg(iz) \neq -\pi\}$, $\{z \in \mathbb{C} : Arg(\overline{z}) \neq \pi/4\}$

iv) Aşağıda kompleks düzlemde çeşitli kümeler verilmiştir. Önce hepsinş grafiğini kompleks düzlemde çizinşiz. Sonra da ilgili kümelerin iç, kapanış, yığılma ve sınır noktalarının oluşturduğu kümeleri belirleyiniz.

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+i| \leq 2\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 4\} \ ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \ veya \ z = -3i\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 4\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : 1 < |\Re e(z)| = 2\} \ ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-4| = |z|\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = \overline{z}\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < |z+1|\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |Arg(z)| \neq \pi\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : Arg(z-i) \geq \pi/4\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z^2) = 1\} \ ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \Im m(iz) = -1\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z^2) = 1\} \ , \ \{z \in \mathbb{C} : |\Re e(1/z)| = 1\}$$