ÖLÇÜM TEORİSİ 2. KSS SINAVI SORULARI

CEVAPLARI

Soru 1'in Cevabı:

$(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \chi_{[0,n)}(x)$$

olarak tanımlansın. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin monoton yakınsaklık teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim.

(i) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi monoton artan bir dizidir. Gerçekten de;

$$f_n(x) = \chi_{[0,n)}(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,n) \\ 0, & x\notin[0,n) \end{cases}$$

ve

$$f_{n+1}(x) = \chi_{[0,n+1)}(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,n+1) \\ 0, & x\notin[0,n+1) \end{cases}$$

olmak üzere, $n\in\mathbb{N}$ alalım:

$x\in[0,n)$ için $f_n(x) = 1 = f_{n+1}(x)$,

$x\in[n,n+1)$ için $f_n(x) = 0 < 1 = f_{n+1}(x)$

$x\notin[n,n+1)$ için $f_n(x) = 0 = f_{n+1}(x)$

olduğundan, $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

elde edilir. O halde, (f_n) dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde monoton artandır.

(ii) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,n)}(x) = \chi_{[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,\infty) \\ 0, & x\notin[0,\infty) \end{cases}$$

dır.

Tüm (f_n)'ler $(n=1,2,\ldots)$ pozitif değerli olduğundan ve (i) ~~ve~~ (ii) sağlandığından, Monoton yakınsaklık teoremi sonucu,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,n)}(x)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)}(x)\, d\lambda = \int_{[0,\infty)} \chi_{[0,\infty)}(x)\, d\lambda + \int_{([0,\infty))^c} \chi_{[0,\infty)}(x)\, d\lambda$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,n)}(x)\, d\lambda = \int_{[0,\infty)} 1 \cdot d\lambda + \int_{([0,\infty))^c} 0 \cdot d\lambda$$

$$= \lambda([0,\infty)) = \infty \text{ 'dur.}$$

SORU 2'nin CEVABI:

$$f_n(x) = \frac{2n}{n+1} \chi_{\left[-2\frac{n+1}{n},\, +2\frac{n+1}{n}\right]}(x) \quad \text{------} \quad (*)$$

fonksiyon dizisinin monoton artan olmadığını göstermek için $n=1$ için bazı x'ler için $f_1(x) \leq f_2(x)$'in sağlanmadığını göstermek yeterlidir. $(*)$ da $n=1$ ve $n=2$ için, sırasıyla,

$$f_1(x) = \chi_{[-4,+4]}(x)$$

ve

$$f_2(x) = \frac{4}{3} \chi_{[-3,+3]}(x)$$

elde edilir.

$x \in [3,4]$ için $f_1(x) = 1 > 0 = f_2(x)$ olduğundan,

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi monoton artan değildir.

Şimdi, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$ integralini hesaplayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2n}{n+1} \chi_{\left[-2\frac{n+1}{n},\, +2\frac{n+1}{n}\right]}(x)\, d\lambda$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \int_{\left[-2\frac{n+1}{n},\, 2\frac{n+1}{n}\right]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \lambda\left(\left[-2\frac{n+1}{n},\, 2\frac{n+1}{n}\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)} \cdot 4\left(\frac{n+1}{n}\right) = 8 \text{ elde edilir.}$$

26.12.2016

ÖLÇÜM TEORİSİ 2. KSS SINAVI

SORU 1 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$ olsun. Bu durumda, monoton yakınsaklık teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$$ integralini

hesaplayınız. (75 puan)

SORU 2. $$f_n(x) = \frac{2n}{n+1}\,\chi_{\left[-2\frac{n+1}{n},\, 2\frac{n+1}{n}\right]}(x)$$

fonksiyonunun monoton artan olmadığını gösteriniz ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$$

limitini hesaplayınız. (25 puan).