

Şu ana kadar incelediğimiz sayısal yöntemler tek adımlı yöntemlerdir: $x = x_n$ noktasındaki y_n sayısal çözüm kullanarak $x = x_{n+1}$ noktasındaki y_{n+1} sayısal çözümü bulunur. Ancak $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$ noktalarındaki $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}$ sayısal çözümlerini kullanarak x_{k+m+1} noktasındaki y_{k+m+1} sayısal çözümü hesaplayan yöntemler de vardır. Bu tür yöntemler *çok adımlı yöntemler* olarak bilinir.

Tanım (*Yöntemin mertebesi*).

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), a \leq x \leq b, y(x_0) = y_0,$$

ifadesiyle verilen BDP'nin sayısal çözümü için kullanılan sonlu fark yöntemi

$$y_{n+1} = \Phi(f, h, y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

olmak üzere, sayısal yönleme ilişkin $\tau_{n+1}(h)$ yerel kesme hatası

$$\tau_{n+1}(h) = O(h^{p+1}).$$

ise, *yöntemin yakınsaklık mertebesi* p dir denir.

Örnek: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ifadesi ile verilen *Euler yöntemi* için $\tau_{n+1}(h) = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) = O(h^2) = O(h^{1+1})$ olduğunu görmüştük. Dolayısıyla *Euler yönteminin* yakınsaklık mertebesi 1 dir.

Örnek: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ifadesi ile verilen *kapalı Euler yöntemi* için $\tau_{n+1}(h) = -\frac{h^2}{2}y''(\beta_n) = O(h^2) = O(h^{1+1})$. olduğunu görmüştük. Dolayısıyla *kapalı Euler yönteminin* yakınsaklık mertebesi 1 dir.

Açıklama: Bir sayısal çözüm yöntemi, bir BDP'nin p . veya daha küçük dereceli her polinom çözümünü tam olarak veriyorsa *yöntemin mertebesi* p dir veya *yöntem* p . mertebededir.

Örnek: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ ifadesiyle verilen kapalı Euler yöntemi için $\tau_{n+1}(h) = -\frac{h^2}{2}y''(\beta_n)$ olduğu biliniyor.

a) $y(x) = ax + b, a \neq 0$ bir BDP'nin çözümü olsun. Bu durumda $y'(x) = a$ ve $y''(x) = 0$ olur. Dolayısıyla

kapalı Euler yöntemi için $\tau_{n+1}(h) = 0$ olur, yani 1. dereceden polinom çözümlerini tam olarak vermektedir.

b) $y(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ bir BDP'nin çözümü olsun. Bu durumda $y'(x) = 2ax$ ve $y''(x) = 2a$ olacağından

$$\tau_{n+1}(h) = -\frac{h^2}{2}(2a) \neq 0 \text{ elde edilir. Bu nedenle kapalı Euler yönteminin mertebesi 1 olur.}$$

Taylor Serisi Yöntemleri

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), a \leq x \leq b, y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

ifadesi ile verilen BDP'ni ele alalım. BDP'nin $y(x)$ çözümünün $(k+1)$. mertebeden türevleri $[a, b]$ aralığında mevcut ve sürekli, yani $y(x) \in C^{k+1}[a, b]$ olsun. Ek olarak $h = \frac{b-a}{N}$ adım uzunluğu ve $x_{n+1} = x_n + h = x_0 + (n+1)h$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ olsun. $y(x)$ çözümünün x_n civarındaki Taylor polinomu kullanılacak olursa; x ile x_n arasında öyle bir ξ vardır ki

$$y(x) = y(x_n) + (x - x_n)y'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{(x - x_n)^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{(x - x_n)^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)$$

sağlanır. Bu durumda, $x_{n+1} - x_n = h$ olduğundan, (x_n, x_{n+1}) aralığında öyle bir ξ_n vardır ki

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n) \quad (2)$$

olur. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ veya $y' = f(x, y)$ veya $y'(x) = f(x, y(x))$ olduğundan, atdışık yürev alma işlemi sonucu

$$y''(x) = f'(x, y(x)), y'''(x) = f''(x, y(x)), \dots, y^{(j)}(x) = f^{(j-1)}(x, y(x)), j = 1, 2, \dots, k+1$$

olduğu görülür.

Şimd, (2) denkleminde $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $f^{(j-1)}(x_n, y(x_n)) = y^{(j)}(x_n)$ alınırsa

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y(x_n)) + \dots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(\xi_n, y(\xi_n)). \quad (3)$$

elde edilir. Son terim ihmal edilecek olursa

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y(x_n)) + \dots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, y(x_n)) \quad (4)$$

olacağı açıktır. $y_n \approx y(x_n)$, $f(x_n, y_n) \approx f(x_n, y(x_n))$, $\dots$, $f^{(k-1)}(x_n, y_n) \approx f^{(k-1)}(x_n, y(x_n))$ olduğundan,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ &= y_n + h \left(f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!}f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x_n, y_n) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5)$$

ifadesi ile tanımlanan y_{n+1} 'nin $y(x_{n+1})$ 'e bir yaklaşım olduğu, yani $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ olduğu açıktır.

$$T_k(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2!}f'(x, y) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!}f^{(k-1)}(x, y), \quad (6)$$

tanımı yapılırsa, (5) ifadesinin

$$y_{n+1} = y_n + hT_k(x_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. (7) ifadesi ile tanımlanan sonlu fark yöntemi *k. mertebeden Taylor serisi yöntemi* olarak adlandırılır.

Açıklama: $k = 1$ için $T_1(x, y; h) = f(x, y)$ olduğundan (7) ifadesi

$$y_{n+1} = y_n + hT_1(x_n, y_n; h) = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

haline gelir ki bu *Euler yöntemidir*. Dolayısıyla Euler yöntemi gerçekte 1. mertebeden bir Taylor serisi yöntemidir.

Pratik uygulamalarda, yöntemin mertebesi arttıkça $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini (yani $f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx}, f_{yy} \dots$) bulmak ve bunların belli noktalardaki değerlerini hesaplamak oldukça maliyetlidir. Bu nedenle yüksek mertebeden Taylor serisi yöntemleri *sıklıkla kullanılmamaktadır*:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \text{ olduğundan dolayı,} \\ y'' &= \frac{d}{dx}(f(x, y)) = f_x + f_y \cdot \frac{dy}{dx} = f_x + f_y \cdot y' = f_x + f_y \cdot f : \\ y''' &= \frac{d}{dx}(f_x + f_y \cdot f) = f_{xx} + f_{xy} \cdot \frac{dy}{dx} + f_{yx} \cdot f + f_{yy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot f + f_y \cdot (f_x + f_y \cdot f) \\ &= f_{xx} + f_{xy} \cdot f + f_{yx} \cdot f + f_{yy} \cdot f \cdot f + f_y \cdot (f_x + f_y \cdot f) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot (f)^2 + f_y \cdot (f_x + f_y \cdot f) \\ &\vdots \end{aligned}$$

olacağımı hatırlayalım.

Örnek: $y' = y - x^2 + 1, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0.5$ BDP'ni ele alalım.

a) $N = 5$ alarak ve 2. mertebeden Taylor serisi yöntemini kullanarak $x = 1.0$ noktasındaki sayısal çözümü hesaplayınız, $x = 1.0$ noktasındaki mutlak hatayı belirleyiniz.

b) $N = N = 5$ alarak ve 4. mertebeden Taylor serisi yöntemini kullanarak $x = 1.0$ noktasındaki sayısal çözümü hesaplayınız, $x = 1.0$ noktasındaki mutlak hatayı belirleyiniz.

Çözüm.

Öncelikle BDP'nin çözümünün $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$ olduğuna dikkat edelim.

a) $k = 2$ için

$$y_{n+1} = y_n + hT_2(x_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ ve}$$

$$T_2(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2!} f''(x, y) \text{ olduğunu biliyoruz. } f(x, y(x)) = y - x^2 + 1 \text{ olduğundan}$$

$$f'(x, y(x)) = \frac{d}{dx}(f(x, y(x))) = \frac{d}{dx}(y - x^2 + 1) = y' - 2x = y - x^2 + 1 - 2x \text{ olur. Böylece}$$

$$T_2(x_n, y_n; h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) = (y_n - x_n^2 + 1) + \frac{h}{2} ((y_n - (x_n)^2 + 1) - 2x_n)$$

$$\Rightarrow T_2(x_n, y_n; h) = \left(1 + \frac{h}{2}\right) (y_n - x_n^2 + 1) - hx_n \text{ olduğundan yöntem verilen BDP için}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(1 + \frac{h}{2}\right) (y_n - x_n^2 + 1) - h^2 x_n, n = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ halini alır}$$

veya $h = 0.2$ olduğundan

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(1 + 0.1)(y_n - (x_n)^2 + 1) - (0.2)^2 x_n \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ olur.}$$

$n = 0 :$

$$y_1 = y_0 + 0.2(1 + 0.1)(y_0 - (x_0)^2 + 1) - (0.2)^2 x_0$$

$$y_1 = 0.5 + 0.2(1 + 0.1)(0.5 - (0)^2 + 1) - (0.2)^2(0) = 0.830000$$

$n = 1 :$

$$y_2 = y_1 + 0.2(1 + 0.1)(y_1 - (x_1)^2 + 1) - (0.2)^2 x_1$$

$$y_2 = (0.830000) + 0.2(1 + 0.1)((0.830000) - (0.2)^2 + 1) - (0.2)^2(0.2) = 1.215800$$

$$n = 2 : y_3 = 1.652076,$$

$$n = 3 : y_4 = 2.132333,$$

$$n = 4 : y_5 = 2.648646 \approx y(x_5) = y(1) = 2.640859$$

$$\text{Böylece } |y(x_5) - y_5| = |2.640859 - 2.648646| = \underline{\underline{0.007787}}.$$

b) $k = 4$ için;

$$y_{n+1} = y_n + hT_4(x_n, y_n; h), n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ olup}$$

$$T_4(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2!} f'(x, y) + \frac{h^2}{3!} f''(x, y) + \frac{h^3}{4!} f'''(x, y) \text{ şeklindedir. } f(x, y(x)) = y - x^2 + 1$$

old.

$$f'(x, y(x)) = \frac{d}{dx} (f(x, y(x))) = \frac{d}{dx} (y - x^2 + 1) = y' - 2x = y - x^2 + 1 - 2x,$$

$$f''(x, y(x)) = \frac{d}{dx} (f'(x, y(x))) = \frac{d}{dx} (y - x^2 + 1 - 2x) = y' - 2x - 2 = y - x^2 - 2x - 1,$$

$$f'''(x, y(x)) = \frac{d}{dx} (f''(x, y(x))) = \frac{d}{dx} (y - x^2 - 2x - 1) = y' - 2x - 2 = y - x^2 - 2x - 1. \text{ Böylece}$$

$$T_4(x_n, y_n; h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^3}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

$$\Rightarrow T_4(x_n, y_n; h) = y_n - (x_n)^2 + 1 + \frac{h}{2} (y_n - (x_n)^2 + 1 - 2(x_n))$$

$$+ \frac{h^2}{3!} (y_n - (x_n)^2 - 2(x_n) - 1) + \frac{h^3}{4!} (y_n - (x_n)^2 - 2(x_n) - 1) \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda verilen BDP için yöntem

$$y_{n+1} = y_n + hT_4(x_n, y_n; h), n = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\right) (y_n - (x_n)^2) - \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\right) (hx_n) + 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24} \text{ halini}$$

alır.

Son olarak, $h = 0.2$ olduğundan

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{0.2}{2} + \frac{(0.2)^2}{6} + \frac{(0.2)^3}{24}\right) (y_n - (x_n)^2) - \left(1 + \frac{(0.2)}{3} + \frac{(0.2)^2}{12}\right) ((0.2) x_n) \\ + 1 + \frac{(0.2)}{2} - \frac{(0.2)^2}{6} - \frac{(0.2)^3}{24}$$

elde edilir veya bazı sadeleştirmeler yapılrısa

$$y_{n+1} = 1.221400y_n - 0.008856 (x_n)^2 - 0.00856 (x_n) + 0.218600, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ bulunur.}$$

$$n = 0 : y_1 = 0.829300$$

$$n = 1 : y_2 = 1.214091$$

$$n = 2 : y_3 = 1.648947$$

$$n = 3 : y_4 = 2.127240$$

$$n = 4 : y_5 = 2.640874 \approx y(x_5) = y(1) = 2.640859$$

$$\text{Böylece, } |y(x_5) - y_5| = |2.640859 - 2.640874| = \underline{\mathbf{0.000015}}.$$

4. *mertebeden Taylor serisi yöntemi*yle verilen sonuçların, 2. *mertebeden Taylor serisi yöntemi*yle verilen sonuçlara göre çok daha iyi olduğu açıktır.

Teorem.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(x_0) = y_0.$$

BDP'nin çözümü $y(x)$ olmak üzere, $y \in C^{k+1}[a, b]$ ve adım uzunluğu $h = \frac{b-a}{N}$ ise, k . *mertebeden Taylor serisi yöntemi* için yerel kesme hatası $\tau_{n+1}(h) = O(h^{k+1})$ olur.

İspat: k . *mertebeden Taylor serisi yöntemi*

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

sonlu fark ifadesiyle verildiğinden

$$y_{n+1} - y_n - hf(x_n, y_n) - \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) - \dots - \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y_n) = 0 \quad (6)$$

tazılabilir. Bu taktirde, *yönteme ilişkin yerel kesme hatası*

$$\tau_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) - \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y(x_n)) - \dots - \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y(x_n)) \quad (7)$$

olur. Böylece, (2) denklemini kullanacak olursak

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(\xi_n, y(\xi_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

bulunur. $y \in C^{k+1}[a, b]$ olduğundan $y^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x, y(x))$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$\tau_{n+1}(h) = O(h^{k+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

olur.

Açıklama: Bir sayısal çözüm yöntemi için $\tau_{n+1}(h) = O(h^{p+1})$ olduğunda, *yöntemin mertebesinin p olduğunu veya yöntemin p . mertebeden olduğunu* hatırlayalım.

Ödev:

- a) $h = 0.25$ alarak ve 2. mertebeden Taylor serisi yöntemini ($k = 2$) kullanarak $\frac{dy}{dx} = 1 + y/x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 2$ BDP'nin $x = 2$ noktasındaki sayısal çözümünü bulunuz.
- b) $h = 0.25$ alarak ve 3. mertebeden Taylor serisi yöntemini ($k = 3$) kullanarak $\frac{dy}{dx} = 1 + y/x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 2$ BDP'nin $x = 2$ noktasındaki sayısal çözümünü bulunuz.

Runge-Kutta Yöntemleri

Daha önce belirttiğimiz üzere, *Taylor serisi yöntemleri* yüksek mertebeden yerel kesme hatası gibi arzu edilen bir özelliğe sahiptir, ancak çoğu problemler için karmaşık ve zaman alıcı bir prosedür olan $f(x, y)$ 'nin yüksek mertebeden türevlerinin ve onların (x_n, y_n) noktalarındaki değerlerinin hesaplanmasını gerektirmesi dezavantajına da sahiptir. Buna karşılık, Runge-Kutta yöntemleri, Taylor yöntemlerinin yüksek dereceli yerel kesme hatasına sahiptir ancak $f(t, y)$ fonksiyonunun türevlerinin hesaplanması ve onların (x_n, y_n) noktalarındaki değerlerinin hesaplanması ihtiyacını ortadan kaldırır.

RK yöntemlerinin elde edilişlerine ilişkin bilgileri sunmadan önce iki değişkenli fonksiyonlar için *Taylor Teoremini* verelim.

Theorem: $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ düzlemde dikdörtgensel bir bölge olmak üzere $f(x, y)$ fonksiyonu ve fonksiyonun $(m + 1)$. mertebeye kadar olan bütün kısmi türevleri $((m + 1)$. mertebeden kısmi türev dahil) R 'de sürekli ve $(x_0, y_0) \in R$ bir iç nokta olsun. Her $(x, y) \in R$ için x ile x_0 arasında bir ξ ve y ile y_0 arasında bir μ vardır, öyle ki

$$f(x, y) = P_m(x, y) + R_m(x, y), \quad (9)$$

olup, $P_m(x, y)$,

$$\begin{aligned}
P_m(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&+ \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\
&+ \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \dots \\
&+ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (x - x_0)^{m-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \quad (10)
\end{aligned}$$

ile ve $R_m(x, y)$,

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (x - x_0)^{m+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu) \quad (11)$$

ile verilir. $P_m(x, y)$ fonksiyonu, f fonksiyonunun (x_0, y_0) noktası civarındaki iki değişkenli m . dereceden Taylor polinomu olarak adlandırılırken,, $R_m(x, y)$ fonksiyonu, $P_m(x, y)$ fonksiyonuna ilişkin kalan terim olarak adlandırılır

İkinci Mertebeden Runge-Kutta Yöntemleri

Runge-Kutta yöntemlerinin elde edilişlerine basit bir giriş yapmak amacıyla aşağıdaki 2. mertebeden Taylor serisi yöntemini ele alalım:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + hT_2(x_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\
T_2(x, y; h) &= f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y)
\end{aligned}$$

$T_2(x, y; h)$ fonksiyonuna $a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ fonksiyonu ile yaklaşımda bulunmak istediğimizi varsayalım. Yani, a_1, a_2, α_1 ve β_1 parametrelerini o şekilde belirleyelim ki, $a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ fonksiyonu, $T_2(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y)$ fonksiyonuna hatanın $O(h^2)$ mertebesinden daha büyük olmadığı bir yaklaşım olsun.

$$f'(x, y) = \frac{d}{dx} (f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot f(x, y),$$

olduğundan,

$$T_2(x, y; h) = f(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot f(x, y) \quad (12)$$

elde edilir. (9) ifadesini kullanırsak, $f(x + \alpha_1, y + \beta_1)$ fonksiyonunun (x, y) civarında 1. dereceden

Taylor polinomunun

$$\begin{aligned}
f(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= \underbrace{f(x, y) + (x + \alpha_1 - x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (y + \beta_1 - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + R_1(x + \alpha_1, y + \beta_1)}_{P_1(x, y)} \\
&= f(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + R_1(x + \alpha_1, y + \beta_1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $R_1(x + \alpha_1, y + \beta_1)$

$$\begin{aligned}
R_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (x + \alpha_1 - x)^{2-j} (y + \beta_1 - y)^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-j} \partial y^j}(\xi, \mu) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (\alpha_1)^{2-j} (\beta_1)^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-j} \partial y^j}(\xi, \mu) \\
&= \frac{1}{2} \binom{2}{0} \alpha_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \mu) + \frac{1}{2} \binom{2}{1} \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \mu) \\
&\quad + \frac{1}{2} \binom{2}{2} \beta_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \mu) + \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \mu) + \frac{1}{2} \beta_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)
\end{aligned}$$

ile verilmekte olup, ξ ; x ile $x + \alpha_1$ arasında ve μ ; y ile $y + \beta_1$ arasındadır. Böylece,

$$\begin{aligned}
a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= a_1 f(x, y) + a_2 f(x, y) + a_2 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + a_2 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\
&\quad + a_2 R_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) \\
&= (a_1 + a_2) f(x, y) + a_2 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + a_2 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\
&\quad + \frac{1}{2} a_2 \alpha_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \mu) + a_2 \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \mu) + \frac{1}{2} a_2 \beta_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu) \quad (13)
\end{aligned}$$

bulunur. Now, (12) ve (13) ifadelerindeki $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ terimlerinin katsayılarını karşılaştıracak olursak,

$$a_1 + a_2 = 1 : a_2 \alpha_1 = \frac{h}{2} : a_2 \beta_1 = \frac{h}{2} \cdot f(x, y) \quad (14)$$

elde edilir (*ne kadar fazla katsayı aynı olursa, yaklaşımın mertebesi de o kadar yüksek olur.*) 3 tane denklem ve 4 tane bilinmeyen olduğundan $4 - 3 = 1$ serbest değişken vardır.

Şimdi: $a_1 = 0$ alırsak,

$$a_1 = 0 \implies a_2 = 1 \implies \alpha_1 = \frac{h}{2} : \beta_1 = \frac{h}{2} \cdot f(x, y)$$

olacağından

$$\begin{aligned}
a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot f(x, y)\right) \\
&= f(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot f(x, y) + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \mu) \\
&\quad + \frac{h^2}{4} \cdot f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{8} (f(x, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
T_2(x, y; h) - (a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1)) &= -\frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \mu) - \frac{h^2}{4} \cdot f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \mu) \\
&\quad - \frac{h^2}{8} (f(x, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu) = O(h^2)
\end{aligned}$$

olur, eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ler ilgili noktalarda sınırlı iseler.

Eğer y_n değeri $y(x_n)$ 'ye bir yaklaşım ise, bu taktirde $f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)\right)$ 'de $f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} \cdot f(x, y(x))\right)$ 'e bir yaklaşım olacaktır. Dolayısıyla,

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

ile tanımlanan y_{n+1} değeri de $y(x_{n+1})$ 'ye bir yaklaşım olacaktır. (15) ifadesi ile verilen yöntem 2. mertebeden bir Runge-Kutta yöntemidir ve Orta Nokta yöntemi olarak adlandırılır. Orta Nokta yöntemi daha yaygın olarak

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot K_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_n, y_n), \\
K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2} h K_1\right)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilecek olursa her bir n değeri için önce K_1 değerinin hesaplanması, sonra da K_1 değeri de kullanılarak K_2 değerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu nedenle yöntem iki-aşamalı, 2. mertebeden bir Runge-Kutta yöntemidir.

Eğer (14) ifadelerinde $a_1 = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$a_1 = \frac{1}{2} \implies a_2 = \frac{1}{2} \implies \alpha_1 = h : \beta_1 = h \cdot f(x, y)$$

elde edilir. Bu durumda

$$a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{1}{2} f(x + h, y + h \cdot f(x, y))$$

olacağından buna karşılık gelen sonlu fark yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

olacaktır. (16) ifadesiyle verilen yöntem *Modifiye Euler yöntemi* olarak adlandırılmakta olup, *Orta Nokta yöntemine* benzer şekilde, *iki-aşamalı bir yöntem* olarak

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [K_1 + K_2], \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ K_1 &= f(x_n, y_n), \\ K_2 &= f(x_n + h, y_n + hK_1). \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde tanımlanır. Daha yüksek mertebeden Runge-Kutta yöntemleri benzer şekile elde edilebilir.

Örnek: $y' = y - x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = 0.5$ BDP'ni ve

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hK_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ K_1 &= f(x_n, y_n), \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right). \end{aligned}$$

ifadesiyle verilen *Orta Nokta yöntemini* ele alalım. $N = 5$ alarak ve *Orta Nokta yöntemini* kullanarak $x = 1.0$ noktasındaki sayısal çözümü hesaplayınız, $x = 1.0$ noktasındaki mutlak hatayı bulunuz.

Çözüm

Verilen BDP'nin çözümünün $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$ olduğu kolaylıkla bulunabilir.

$$f(x, y) = y - x^2 + 1 \implies f(x_n, y_n) = y_n - x_n^2 + 1, \quad N = 5 \implies h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$x_0 = 0 : x_1 = 0.2 : x_2 = 0.4 : x_3 = 0.6 : x_4 = 0.8 : x_5 = 1.0$$

$$n = 0 :$$

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 0.5) = 1.5$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f\left(0 + \frac{0.2}{2}, 0.5 + \frac{0.2}{2}(1.5)\right) = f(0.1, 0.65) = 1.64$$

$$\implies y_1 = y_0 + hK_2 = 0.5 + (0.2)(1.64) = 0.828$$

$$n = 1 :$$

$$K_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2, 0.828) = 1.788$$

$$K_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f\left(0.2 + \frac{0.2}{2}, 0.828 + \frac{0.2}{2}(1.788)\right)$$

$$\implies K_2 = f(0.3, 1.0068) = 1.9168$$

$$\implies y_2 = y_1 + hK_2 = 0.828 + (0.2)(1.9168) = 1.21136$$

$n = 2 :$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_2, y_2) = f(0.4, 1.21136) = 2.05136 \\ K_2 &= f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f(0.5, 1.416496) = 2.166496 \\ \implies y_3 &= y_2 + hK_2 = 1.21136 + (0.2)(2.166496) = 1.644659 \end{aligned}$$

$n = 3 :$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_3, y_3) = f(0.6, 1.6446592) = 2.284659 \\ K_2 &= f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f(0.7, 1.873125) = 2.383125 \\ \implies y_4 &= y_3 + hK_2 = 1.644659 + (0.2)(2.383125) = 2.121284 \end{aligned}$$

$n = 4 :$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_4, y_4) = f(0.8, 2.1212840) = 2.481284 \\ K_2 &= f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f(0.9, 2.369412) = 2.559412 \\ \implies y_5 &= y_4 + hK_2 = 2.121284 + (0.2)(2.559412) = 2.633166 \\ y_5 &= 2.633166 \approx y(x_5) = y(1.0) = (1+1)^2 - 0.5e^1 = 2.640859 \\ x = 1 \text{ noktasındaki mutlak hata: } &|y(x_5) - y_5| = |2.640859 - 2.633166| = 0.007693. \end{aligned}$$